

はじめに (数学基礎 B1)

数学基礎 B = 線形代数

教科書 「要点明解 線形数学」 培風館

- ▶ 第1章 行列
- ▶ 第2章 連立1次方程式
(第3章 行列式)
(第4章 行列の対角化)

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス

LINK

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

第1章 行列

連立1次方程式を解いてみる！

まず，簡単な場合のみ…

式の本数 $m = 2$

変数の数 $n = 2 \cdots x, y$

例1

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & \cdots (1) \\ 6x + 9y = 4 & \cdots (2) \end{cases}$$

をみたす x, y は？

$$(2) - 3 \times (1) : 0 = 1 \quad ? ? ? ? ? ? ?$$

解なし

例 2

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & \cdots (1) \\ 2x + 4y = 6 & \cdots (2) \end{cases}$$

をみたす x, y は？

$$(2) - 2 \times (1) : 0 = 0 \quad ? ? ? ? ? ? ?$$

$$0 = 0 \quad \cdots (3)$$

(1) かつ (2) の解 $\iff$ (1) かつ (3) の解 $\iff$ (1) の解

解は $x + 2y = 3$ をみたす全ての x, y

注意

解は無数にあり，すべて直線 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 上になっている

例 3

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \cdots (1) \\ 3x + 2y = 2 & \cdots (2) \end{cases}$$

をみたす x, y は？

$$2 \times (1) - (2) : x = 4 \quad \cdots (3)$$

$$((2) - 3 \times (3)) \times \frac{1}{2} : y = -5 \quad \cdots (4)$$

(1) かつ (2) の解 $\iff$ (2) かつ (3) の解 $\iff$ (3) かつ (4) の解
解は $(x, y) = (4, -5)$ のみ

注意

上で**行ったり来たり** ($\iff$) できることが重要
片向き $\Leftarrow, \Rightarrow$ だと**全ての解をもれなくぴったり求めた**とは言えない

● 一般の場合は？

式の数 $m \cdots$ 多い

変数の数 $n \cdots x, y, z, w \cdots$ 多い

$x_1, x_2, \dots, x_{100}, \dots$ 多い

$\cdots$ 大変なので「**行列**」を用いる

上の例 3

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

定義 ($m \times n$ 行列 A)

$$\begin{array}{l} \text{第 1 行} \\ \text{第 2 行} \\ \vdots \\ \text{第 } m \text{ 行} \end{array} \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right),$$

$$A = \begin{array}{cccc} & \text{第 1 列} & \text{第 2 列} & \cdots & \text{第 } n \text{ 列} \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right) \end{array}$$

i 行 j 列にある a_{ij} を行列 A の (i, j) 成分 という.
 $A = (a_{ij})$ とかく.

定義 (行ベクトル, 列ベクトル)

$1 \times n$ 行列 $(a_1, \dots, a_n)$ を長さ n の 行ベクトル,

$m \times 1$ 行列 $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ を長さ m の 列ベクトル という。

注意

行列 $A = (a_{ij})$ は, 行ベクトル, 列ベクトルを用いて

$$A = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_m \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathfrak{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}) \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn}) \end{array}$$

$$A = (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n) \quad \mathfrak{b}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \mathfrak{b}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

ともかける. 教科書の太字 $\mathfrak{a}_1$ は 手書きでは二重線 $\mathfrak{a}_1$ でかく.

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

2 × 2 行列

2 × 2 行列

2 × 3 行列

$m \times n$ 行列どうしは 同じ型 という

定義 ($A = B$)

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ を同じ型の行列とする.

A と B は等しい $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ すべての i, j に対して, $a_{ij} = b_{ij}$.

A と B は等しいとき, $A = B$ とかく.

▶ def ... definition(定義)

定義 (零行列)

$A = (a_{ij})$ を行列とする.

A は 零行列 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ すべての i, j に対して, $a_{ij} = 0$.

A が零行列のとき, $\underline{A = \mathbf{O}}$ とかく :

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

定義 (正方行列)

$n \times n$ 行列を n 次正方行列 という.

- ▶ 正方行列は実際にかくと正方形

定義 (行列 A と B の和, 差, 定数倍)

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ を同じ型の行列, c を実数とする.

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \quad \underline{A \text{ と } B \text{ の和}}$$

$$A - B := (a_{ij} - b_{ij}) \quad \underline{A \text{ と } B \text{ の差}}$$

$$cA := (ca_{ij}) \quad \underline{A \text{ の } c \text{ 倍}}$$

- ▶ $X := Y$ は X を Y で定義する という記号

定理 1.1

A, B, C を同じ型の行列, O を零行列とすると, 次が成立する.

1. $A + B = B + A$ (交換法則)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (結合法則)
3. $A + O = A$
4. $A - A = O$

定理 1.2

A, B を同じ型の行列, c, d を実数とすると, 次が成立する.

1. $c(dA) = (cd)A$
2. $c(A + B) = cA + cB, \quad (c + d)A = cA + dA$
3. $A + (-1)B = A - B, \quad 1A = A$