

はじめに (数学基礎 B1)

数学基礎 B = 線形代数

教科書 「要点明解 線形数学」 培風館

- ▶ 第1章 行列
- ▶ 第2章 連立1次方程式
(第3章 行列式)
(第4章 行列の対角化)

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス

LINK

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

定義 (正則行列, 逆行列)

$A : n$ 次正方行列, $E_n : n$ 次単位行列.

$$AB = BA = E_n \cdots (1)$$

なる n 次正方行列 B が存在するとき, A を n 次 正則行列 という. このとき, (1) をみたす行列 B を A の逆行列 といい, $B = A^{-1}$ とあらわす.

注意

A が 正則行列 のとき, 逆行列 A^{-1} は **ただ 1 つ** 存在する.

$$\because AB = BA = E_n \cdots (1)$$

$$AB' = B'A = E_n \cdots (2)$$

$$\Rightarrow B = BE_n \underset{(2)}{=} B(AB') \underset{\text{結合法則}}{=} (BA)B' \underset{(1)}{=} E_n B' = B' \text{ より } B = B' \quad \square$$

例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad - bc \neq 0 \text{ のとき,}$$

$$A \text{ は正則行列で逆行列 } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

($\therefore$ 実際, 各自確かめてみる)

例

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, ad - bc = -10 + 21 = 11 \neq 0 \text{ より,}$$

$$A \text{ は正則行列で } A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

注意

後に, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \text{正則行列} \iff ad - bc \neq 0$ を示す. ($\Leftarrow$) は OK)

また, $n \times n$ 行列 ($n \geq 3$) がいつ正則行列となるかは, 今後学んでいく.

例 (逆行列 A^{-1} の応用)

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

は $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ を用いて, $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ とかける. この両辺に **逆行列** $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ をかけると,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

他の解 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ がないことは, **逆行列** A^{-1} の**一意性 (1 つしかないこと)** からわかる.

定理 1.4

(1) $A : n$ 次正則行列 $\Rightarrow A^{-1} : n$ 次正則行列であり,

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

(2) $A, B : n$ 次正則行列 $\Rightarrow AB, BA$ は n 次正則行列であり,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}. \quad (\text{順番に注意})$$

注意

実際, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n$ となる. $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E_n$ も同様. $\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

1.3 いろいろな行列

定義 (A^n)

A : 正方行列.

$A^2 := AA$, $A^3 := AAA$, ..., $A^n := A \cdots A$ (n 個). A の n 乗 という.

$A^0 := E$ (単位行列), $A^1 := A$ とする.

定義 (A^T) [転置 $\cdots$ transposed]

$A = (a_{ij}) : m \times n$ 行列.

$A^T := (a_{ji}) : n \times m$ 行列を A の転置行列 という. (行 $\leftrightarrow$ 列)

例

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}^T = (1 \ 3 \ 5), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

例 (内積, 直交する)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 : \underline{\mathbf{x} \text{ と } \mathbf{y} \text{ の内積}}.$$

$$\mathbf{x} \text{ と } \mathbf{y} \text{ が } \underline{\text{直交する}} \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0.$$

例

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} a \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = (a \ a \ 1) \begin{pmatrix} a \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = a^2 - 3a + 2 = (a - 1)(a - 2) \text{ であり,}$$

$$\mathbf{x} \text{ と } \mathbf{y} \text{ が } \underline{\text{直交する}} \iff a = 1 \text{ または } a = 2.$$

例

$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$

$$\therefore A^T + B^T = (a_{ji}) + (b_{ji}) = (a_{ji} + b_{ji}) = (a_{ij} + b_{ij})^T = (A + B)^T.$$

例

$$(AB)^T = B^T A^T. \quad (\text{順番に注意})$$

$$\therefore A = (a_{ij}), B = (b_{jk}) \text{ とすると, } AB = (\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}) \text{ より,}$$

$$AB \text{ の } (i, k) \text{ 成分} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = (AB)^T \text{ の } (k, i) \text{ 成分}$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n b_{jk} a_{ij} = B^T A^T \text{ の } (k, i) \text{ 成分.}$$

例

$$A : \text{正則行列} \Rightarrow A^T : \text{正則行列.}$$

$$\therefore \text{実際, } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \text{ となる:}$$

$$A^T (A^T)^{-1} = A^T (A^{-1})^T \underset{\text{上の例}}{=} (A^{-1} A)^T = E_n^T = E_n.$$

$$(A^T)^{-1} A^T = (A^{-1})^T A^T \underset{\text{上の例}}{=} (A A^{-1})^T = E_n^T = E_n.$$

定義 (対称行列, 交代行列)

A : 正方行列.

A : 対称行列 $\stackrel{\text{def}}{\iff} A^T = A$.

A : 交代行列 $\stackrel{\text{def}}{\iff} A^T = -A$.

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = A^T \text{ より, } A \text{ は対称行列.}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} = -B^T \text{ より, } B \text{ は交代行列.}$$