

はじめに (数学基礎 B2)

数学基礎 B = 線形代数

教科書 「要点明解 線形数学」 培風館

(第1章 行列)

(第2章 連立1次方程式)

▶ 第3章 行列式

▶ 第4章 行列の対角化

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス

LINK

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

定理 3.6

n 次正方行列 A のある行を k 倍した行列 A'' に対して, $|A''| = k|A|$.

例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A'' = \begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A''| = kad - kbc = k(ad - bc) = k|A|.$$

定理 3.7

n 次正方行列 A のある行が行ベクトルの和 $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \mathbf{a} + \mathbf{a}' \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \mathbf{a} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \mathbf{a}' \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = (a + a')d - (b + b')c \\ &= (ad - bc) + (a'd - b'c) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

定理 3.8

n 次正方行列 A のある (i) 行に他の行 (j) 行の k 倍を加えた行列 A''' に対して, $|A'''| = |A|$.

$$\therefore |A'''| = \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ a_i + k a_j & & & \\ a_j & & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} \stackrel{3.7}{=} \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ a_i & & & \\ a_j & & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ k a_j & & & \\ a_j & & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} \stackrel{3.6}{=} |A| + k \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ a_j & & & \\ a_j & & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{3.5}{=} |A| + k \cdot 0 = |A|.$$

まとめると … 3つの行基本変形 I, II, III に対して,

I 行列 A の2つの行を入れかえた行列を A'

II 行列 A のある行を k 倍した行列を A''

III 行列 A のある行に他の行の k 倍をたした行列を A'''

とすると,

$$|A'| = -|A| \quad \cdots (1),$$

$$|A''| = k|A| \quad \cdots (2)$$

$$|A'''| = |A| \quad \cdots (3)$$

となる. この (1), (2), (3) を用いれば, 行基本変形 I, II, III によって,

$$A \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} a & * & \cdots & * \\ 0 & \color{red}{\boxed{B}} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \text{の形にできれば, (定理 3.3 より)}$$

$|A|$ を $a \cdot |B|$ を用いて計算できる.

例

$$\left| \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{\substack{\updownarrow \\ \boxed{\text{I}}}} = - \left| \begin{array}{ccc} \color{red}{1} & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{\downarrow \times (-3)} \boxed{\text{III}} = - \left| \begin{array}{ccc} \color{red}{1} & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{\downarrow \times 1} \boxed{\text{III}} = - \left| \begin{array}{ccc} \color{red}{1} & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right|$$

$$\stackrel{3.3}{=} - \left| \begin{array}{cc} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{array} \right| = (-1) \cdot 4 = -4.$$

例

$$\left| \begin{array}{cccc} \color{red}{1} & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right| \xrightarrow{\downarrow \times 3} \boxed{\text{III}} = \left| \begin{array}{cccc} \color{red}{1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right| \xrightarrow{\downarrow \times 2} \boxed{\text{III}} = \left| \begin{array}{cccc} \color{red}{1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \end{array} \right| \stackrel{3.3}{=} \left| \begin{array}{ccc} \color{red}{8} & \color{red}{16} & \color{red}{8} \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{array} \right|$$

$$\boxed{\text{II}} = 8 \cdot \left| \begin{array}{ccc} \color{red}{1} & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{array} \right| \xrightarrow{\downarrow \times (-5)} \boxed{\text{III}} = 8 \cdot \left| \begin{array}{ccc} \color{red}{1} & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 11 \\ 4 & 7 & 4 \end{array} \right| \xrightarrow{\downarrow \times (-4)} \boxed{\text{III}} = 8 \cdot \left| \begin{array}{ccc} \color{red}{1} & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right| \stackrel{3.3}{=} 8 \cdot \left| \begin{array}{cc} -1 & 11 \\ -1 & 0 \end{array} \right|$$

$$= 8 \cdot 11 = 88.$$

例

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \text{ を因数分解せよ.}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\uparrow \times 1 \\ \uparrow \times 1}} \boxed{\text{III}} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\text{II}} = (x+y+z) \begin{vmatrix} \color{red}{1} & 1 & 1 \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\downarrow \times (-y) \\ \downarrow \times (-z)}} \boxed{\text{III}} = (x+y+z) \begin{vmatrix} \color{red}{1} & 1 & 1 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-z \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{3.3}{=} (x+y+z) \begin{vmatrix} x-y & 0 \\ 0 & x-z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-y)(x-z).$$

注意

n 次正方行列 A に対して, 定理 3.6 を n 回使うと,
 $|kA| = k^n |A|$. $\cdots |kA| \neq k|A|$ ($n \geq 2$) に注意する