はじめに　(数学基礎 B2)

$\boxed{\text{数学基礎 B} \quad = \quad \text{線形代数}}$

教科書　「要点明解 線形数学」培風館

(第 1 章　行列)

(第 2 章　連立 1 次方程式)

- 第 3 章　行列式
- 第 4 章　行列の対角化

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 ⟶ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

定理 3.9 (重要)

n 次正方行列 A, B に対して，$|AB| = |A|\,|B|$.

例

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} |AB| &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\ &= \cancel{a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} \cancel{+ a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}} \\ &\quad \cancel{- a_{11}b_{12}a_{21}b_{11}} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} \cancel{- a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = |A|\,|B|. \end{aligned}$$

注意

一般に，$|A + B| \neq |A| + |B|$. 例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |A| + |B| = 1 + 1 = 2 \neq 0 = |A + B|$.

定義 (余因子)

$A = (a_{ij})$: n 次正方行列.

$\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A_{ij}|$ を A の$\underline{(i,j)\text{ 余因子}}$という.

但し,

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & \cancel{a_{1j}} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \cancel{\vdots} & \vdots & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{i,j-1}} & \cancel{a_{ij}} & \cancel{a_{i,j+1}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots & \cancel{\vdots} & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & \cancel{a_{nj}} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(A_{ij} は A から第 i 行と第 j 列を取り除いた $(n-1)\times(n-1)$ 行列)

注意

行列式の定義より, $|A| = a_{11}\widetilde{a}_{11} + \cdots + a_{1n}\widetilde{a}_{1n}$. より一般に $\cdots$

定理 3.10

$A=(a_{ij})$: n 次正方行列.

(1) $$a_{i1}\widetilde{a}_{j1}+\cdots+a_{in}\widetilde{a}_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\widetilde{a}_{jk}=\begin{cases}|A| & (i=j)\\ 0 & (i\neq j);\end{cases}$$

(2) $$a_{1i}\widetilde{a}_{1j}+\cdots+a_{ni}\widetilde{a}_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\widetilde{a}_{kj}=\begin{cases}|A| & (i=j)\\ 0 & (i\neq j).\end{cases}$$

- (1) で $i=j$ のとき，$|A|=a_{i1}\widetilde{a}_{i1}+\cdots+a_{in}\widetilde{a}_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\widetilde{a}_{ik}$ を第 i 行に関する $|A|$ の余因子展開という.

  ($i=1$ のとき，$|A|$ の定義そのもの)

- (2) で $i=j$ のとき，$|A|=a_{1i}\widetilde{a}_{1i}+\cdots+a_{ni}\widetilde{a}_{ni}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\widetilde{a}_{ki}$ を第 i 列に関する $|A|$ の余因子展開という.

例 $(n=3)$ 定理 3.10 (1)

$i=j=1$. 第 1 行に関する $|A|$ の余因子展開.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

($i=1$ のとき, $|A|$ の定義そのもの)

$i=j=2$. 第 2 行に関する $|A|$ の余因子展開.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$i=j=3$. 第 3 行に関する $|A|$ の余因子展開.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

例 $(n=3)$ 定理 3.10 (2)

$i=j=1$. 第 1 列に関する $|A|$ の余因子展開.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

$i=j=2$. 第 2 列に関する $|A|$ の余因子展開.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

$i=j=3$. 第 3 列に関する $|A|$ の余因子展開.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

定義 (余因子行列)

$\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ji})$ を A の余因子行列という． $\cdots$ $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})^{\mathrm{T}}$ (転置) に注意

定理 3.10 (1), (2) を行列であらわすと $\cdots$

$$A\widetilde{A} \underset{(1)}{=} \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A|\, E_n \underset{(2)}{=} \widetilde{A}A.$$

これより，

定理 3.11 (重要)

A : n 次正方行列.

(1) A : 正則 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$;

(2) A : 正則 $\Rightarrow$ $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\,\widetilde{A}$.

$\because$ A : 正則 $\Rightarrow AA^{-1} = E_n \Rightarrow |A|\,|A^{-1}| \underset{3.9}{=} |AA^{-1}| = 1$ より， $|A| \neq 0$.

$|A| \neq 0 \Rightarrow A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|\,E_n \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$ で A は正則． (2) も OK.

例

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. A の (i, j) 余因子 $\widetilde{a}_{ij}$ は,

$$\widetilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}|a_{22}| = +|a_{22}| = a_{22},\ \widetilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}|a_{21}| = -|a_{21}| = -a_{21},$$
$$\widetilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}|a_{12}| = -|a_{12}| = -a_{12},\ \widetilde{a}_{22} = (-1)^{2+2}|a_{11}| = +|a_{11}| = a_{11}.$$

$$\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ji}) = (\widetilde{a}_{ij})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

定理 3.11 より，A : 正則 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

$|A| \neq 0$ のとき，$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A} = \dfrac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

$\cdots$ 第 1 章の内容と一致している

- 各自，第 3 章の章末問題 (教 p.71) をやっておく！

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. A の (i, j) 余因子 $\widetilde{a}_{ij}$ は,

$$\widetilde{a}_{11} = {\color{blue}+}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2,\ \widetilde{a}_{12} = {\color{red}-}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ \widetilde{a}_{13} = {\color{blue}+}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\widetilde{a}_{21} = {\color{red}-}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ \widetilde{a}_{22} = {\color{blue}+}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,\ \widetilde{a}_{23} = {\color{red}-}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\widetilde{a}_{31} = {\color{blue}+}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ \widetilde{a}_{32} = {\color{red}-}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2,\ \widetilde{a}_{33} = {\color{blue}+}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ji}) = (\widetilde{a}_{ij})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{31} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{32} \\ \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{23} & \widetilde{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = a_{11}\widetilde{a}_{11} + a_{12}\widetilde{a}_{12} + a_{13}\widetilde{a}_{13} = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 = -4.$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$