

はじめに (数学基礎 B2)

数学基礎 B = 線形代数

教科書 「要点明解 線形数学」 培風館

(第1章 行列)

(第2章 連立1次方程式)

▶ 第3章 行列式

▶ 第4章 行列の対角化

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス

LINK

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

4.3 基底と座標

定義 (基底, 座標)

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の 基底 であるとは, すべての $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbf{a} = b_1 \mathbf{v}_1 + \dots + b_n \mathbf{v}_n$ ($b_i \in \mathbb{R}$) と一意的 (ただ1通り) に表せること.

このとき, $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ を 基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ に関する $\mathbf{a}$ の座標 という.

▶ 一意的 (ただ1通り) とは …

$$\mathbf{a} = b_1 \mathbf{v}_1 + \dots + b_n \mathbf{v}_n = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n \Rightarrow b_1 = c_1, \dots, b_n = c_n.$$

例

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の座標は正規直交座標とよばれ,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ を } \mathbb{R}^n \text{ の標準基底といった.}$$

注意

基底の定義の式 $\mathbf{a} = b_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + b_n \mathbf{v}_n$ ($b_i \in \mathbb{R}$) は,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} v_{1i} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ (i = 1, \dots, n) \text{ に対して,}$$
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + b_n \begin{pmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

となる. よって,

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の**基底** $\Leftrightarrow$ すべての $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ がただ一つの解 } \mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ をもつ.}$$

定理 4.8

$\mathbf{x}$: 標準基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ に関する座標,

$\mathbf{x}'$: 基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ に関する座標

$\Rightarrow \mathbf{x} = P \mathbf{x}'$. 但し, $P = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$ で $|P| \neq 0$. ($\Rightarrow \mathbf{x}' = P^{-1} \mathbf{x}$ となる)

定理 4.9

P : n 次正方行列.

P : 正則 $\Leftrightarrow P$ の列ベクトル全体が $\mathbb{R}^n$ の基底.

定義 (正規直交基底)

大きさが1で互いに直交しているベクトルからなる基底を 正規直交基底 という.

例

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{E}^n$ を大きさが1で互いに直交しているとする.

前回の注意より, $A = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$ は直交行列 ($A^T A = E$) であり,

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は正規直交基底となる. 実際, すべての $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して,

$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$ と一意的に表せる.

$\therefore \mathbf{x} = k_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + k_n \mathbf{v}_n \Rightarrow k_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle \ (i = 1, \dots, n)$ を示す.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle k_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + k_n \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle$$

$$= k_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + k_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + k_n \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle$$

$$= k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i \cdot 1 + \cdots + k_n \cdot 0 = k_i.$$

$$(\because \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = 0 \ (i \neq j), \ ||\mathbf{v}_i|| = 1)$$

▶ (標準基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{E}^n$ のかわりに)

$\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して, 正規直交基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ を用いて,

正規直交座標 $\begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \end{pmatrix}$ を導入できる.

定義 (線形写像, 線形変換)

$$\text{写像 } y = f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

の各 $f_i(x_1, \dots, x_n)$ が $x_1, \dots, x_n$ の同次 1 次式 (定数項なし) のとき, $y = f(\mathbf{x})$ を 線形写像 という. 特に, $m = n$ のとき, 線形変換 という.

注意

線形写像 $y = f(\mathbf{x})$ は

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \text{ とかけるので,}$$

$$y = A\mathbf{x}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

定理 4.10

$y = f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$: 線形写像.

(1) $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して, $f(x + y) = f(x) + f(y)$;

(2) $x \in \mathbb{R}^n$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して, $f(cx) = cf(x)$.

逆に, (1), (2) をみたす写像 $y = f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は線形写像.

例

$y = f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: 線形変換, $y = Ax$, $A : n \times n$ 行列.
 A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (重複を許す) に対する, A の固有ベクトルを $p_1, \dots, p_n$ とする. さらに, $\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底を仮定する.

このとき, すべての $x \in \mathbb{R}^n$ は

$$x = X_1 p_1 + \dots + X_n p_n \quad (X_i \in \mathbb{R}) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と一意的に表せる. また,

$$f(x) = f(X_1 p_1 + \dots + X_n p_n) = A(X_1 p_1 + \dots + X_n p_n) =$$
$$AX_1 p_1 + \dots + AX_n p_n = (\lambda_1 X_1) p_1 + \dots + (\lambda_n X_n) p_n \quad (\because A p_i = \lambda_i p_i)$$

より, 原点を通り, それぞれ $p_1, \dots, p_n$ に平行な直線を座標軸にとれば,

この $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ 座標について, $f(X) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} X = D X$ と

なる. $x = P X$, $P = (p_1 \cdots p_n)$ で, $Ax = f(x) = PD X = PD P^{-1} x$.
すなわち, $P^{-1}AP = D$.

▶ 固有ベクトルに平行な座標軸 X をとれば, f は簡潔な式になる!

- ▶ さらに … 実は、次が成り立つ：

定理

$P : n \times n$ 行列．次は同値：

- (a) P は直交行列 ($P^{-1} = P^T$);
- (b) P の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；
- (c) すべての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$;
- (d) すべての $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\langle P\mathbf{x}, P\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

- ▶ $\mathbf{x} = P\mathbf{X}$, $P = (\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n)$, P は直交行列とすると, 内積を変えない座標の変換, したがって, 長さと角度を変えない座標の変換となる.
 $(\because \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} = \cos \theta, \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle})$
- ▶ 直交対角化 $P^{-1}AP = D$, $P^{-1} = P^T$ は内積 (長さと角度) を変えない座標の変換によって線形変換 f をあらわしたもの.
- ▶ 実は, 第 1 章の最後の例 1.23 (p. 26) (2 次形式と楕円の回転の例) が直交対角化の例になっていた！

5.1 行列のべきの計算と応用

例 (前回の例のつづき)

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して, A^n を求めよ. 前回の例の Step 2 より,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対して, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(いまは Step 3 の直交対角化は必要ない. 対角化のみで OK.)

$$\therefore A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\therefore A^n = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

例 (前回の例のつづき)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{であるから,}$$

$$\begin{aligned} \therefore A^n &= P \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n & 2^n & 2^n \\ 5^n & -2^n & 0 \\ 5^n & 0 & -2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2 \cdot 2^n & 5^n - 2 \cdot 2^n + 2^n & 5^n + 2^n - 2 \cdot 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2 \cdot 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & 5^n + 2 \cdot 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$