

# はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス

[LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。  
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

## 第4章 線形空間

“線形” = “線型” = “linear” = “1次”

$x = x^1$  ( $x^2, x^3, \dots$  は出てこない),  $y = y^1, z = z^1, \dots$

●  $n$ 次元?

0次元 … 点    1次元 … 直線    2次元 … 平面    3次元 … 空間

$n$ 次元?

定義 ( $\mathbb{R}^n$ )

$\mathbb{R}^n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \text{ は実数}\}$      $n$ 次元ユークリッド空間

▶  $X := Y$  は  $X$  を  $Y$  で定義する という記号

注意

$\mathbb{R}^n$  は数ベクトル空間ともよばれる。

$(a_1, a_2, a_3)$  で点もベクトルもあわす。

## 定義 (同値)

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$$\mathbf{u} \text{ と } \mathbf{v} \text{ が } \underline{\text{同値}} \stackrel{\text{def}}{\iff} u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n.$$

▶ def ... definition(定義)

## 定義 (スカラー倍, 和, ゼロ・ベクトル, 和に関する逆元, 差)

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}.$$

$$k\mathbf{u} := (ku_1, \dots, ku_n) \quad \underline{\text{スカラー倍}}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \quad \underline{\text{和}}$$

$$\mathbf{0} := (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \quad \underline{\text{ゼロ・ベクトル}}$$

$$-\mathbf{u} := (-u_1, \dots, -u_n) \quad \underline{\text{和に関する逆元}}$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} := \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = (u_1 - v_1, \dots, u_n - v_n) \quad \underline{\text{差}}$$

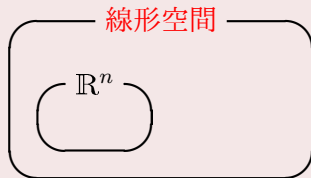
## 定理 1 ( $\mathbb{R}^n$ の基本性質)

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, k, l \in \mathbb{R}$ .

- (a)  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$  (交換法則)
- (b)  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$  (結合法則)
- (c)  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$  (ゼロ元  $\mathbf{0}$  の存在)
- (d)  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  (逆元  $-\mathbf{u}$  の存在)
- (e)  $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
- (f)  $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$  (分配法則 1)
- (g)  $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$  (分配法則 2)
- (h)  $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$  (単位元 1 の存在)

## 注意

$\mathbb{R}^n$  を一般化したものが線形空間  
線形空間で成立する定理は  $\mathbb{R}^n$  でも成立



## 定義 ((ユークリッド) 内積)

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1 v_1 + \dots + u_n v_n \quad \mathbf{u} \text{ と } \mathbf{v} \text{ の (ユークリッド) 内積}$$

## 注意

$n = 2, 3$  のときは,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \theta$  であった. (教 p.123)

- ▶ 教 p.152 の例 1 を各自みておく

## 定理 2(内積の性質)

$$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}.$$

$$(a) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$(b) (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

$$(c) (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

$$(d) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \quad \text{等号成立} \iff \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ (ゼロ・ベクトル)}$$

- ▶ 教 p.153 の例 2 を各自みておく

## 定義 ((ユークリッド) ノルム, (ユークリッド) 距離)

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$$\|\mathbf{u}\| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} \quad \mathbf{u} \text{ の (ユークリッド) ノルム}$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

$\mathbf{u}$  と  $\mathbf{v}$  の (ユークリッド) 距離

## 注意

ベクトル  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  を  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  とすれば, 連立方程式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ は } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ とかけて便利.}$$