

はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

第5章 1次変換 → 線形写像

5.1 1次変換 → 線形写像

定義 (線形写像, 1次変換)

V, W : 線形空間. 写像 $F : V \rightarrow W$ が1次変換 線形写像 とは,

$$(i) F(u + v) = F(u) + F(v) \quad (\forall u, v \in V);$$

$$(ii) F(ku) = kF(u) \quad (\forall k \in \mathbb{R}, \forall u \in V)$$

をみたすこと. $V = W$ のとき, F を V 上の 1次変換 という.

注意

$$(i) \text{ かつ } (ii) \Leftrightarrow (iii) F(ku + lv) = kF(u) + lF(v) \quad (\forall k, l \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V).$$

$\therefore (\Rightarrow)$ OK. $(\Leftarrow)$ $k = l = 1$ と $l = 0$ で OK.

例

$A : m \times n$ 行列.

$T = T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ は線形写像.

$\because A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$ より $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$,

$A(k\mathbf{u}) = k(A\mathbf{u})$ より $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$.

例えば, $T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ は線形写像.

注意

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ は線形写像ではない.

$\because F(2x) = (2x)^2 = 4x^2 = 2^2 F(x) \neq 2F(x)$. “線形” = “linear” = “1 次”

例

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad T = T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} \text{ は線形写像.}$$

この1次変換を θ ラジアン回転 という.

$$\text{実際, } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \text{ と極座標表示すると, } \mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \cos \theta - r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \phi \sin \theta + r \sin \phi \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\phi + \theta) \\ r \sin(\phi + \theta) \end{pmatrix}.$$

例

V, W : 線形空間. $T : V \rightarrow W, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{0}$ は線形写像. (ゼロ写像 という)

$$\because T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}),$$

$$T(k\mathbf{u}) = \mathbf{0} = k \cdot \mathbf{0} = k \cdot T(\mathbf{u}) \quad (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, k \in \mathbb{R}).$$

例

$T : V \rightarrow V, \mathbf{v} \mapsto k \cdot \mathbf{v}$ は **1 次変換** (**線形写像**).

(比例拡大 ($k > 1$), 比例縮小 ($0 < k < 1$) という)

$$\because T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}),$$

$$T(l\mathbf{u}) = k(l\mathbf{u}) = l(k\mathbf{u}) = l \cdot T(\mathbf{u}) \quad (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, l \in \mathbb{R}).$$

例

V : 内積空間, $W \subset V, S = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r\} : W$ の正規直交基底.

$$T : V \rightarrow W, \mathbf{v} \mapsto \text{proj}_W \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \dots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_r \rangle \mathbf{w}_r$$

$\mathbf{v}$ の W への正射影は **線形写像**.

$\because$ 各自. (教 p.254)

例

V : 線形空間, $S : V$ の基底, $(\mathbf{v})_S : S$ に関する $\mathbf{v}$ の座標ベクトル.

$T : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v})_S$ は **線形写像**.

$\because$ 各自. (教 p.255)

▶ 座標ベクトル $(\mathbf{v})_S$ のかわりに座標行列 $[\mathbf{v}]_S$ としても同様

例

V : 内積空間, $\mathbf{v}_0 \in V$. $T : V \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle$ は線形写像.
 $\therefore T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}),$
 $T(k \mathbf{u}) = \langle k \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle = k \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle = k T(\mathbf{u}).$

例

$V := C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \text{連続}\},$
 $D : V \rightarrow V, f \mapsto f' \text{ (微分) は線形写像.}$
 $\therefore D(f + g) = D(f) + D(g), D(k f) = k D(f) \ (\forall f, g \in V).$

例

$V := C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \text{連続}\},$
 $J : V \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$ は線形写像.
 $\therefore J(f + g) = \int_0^1 (f(x) + g(x)) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = J(f) + J(g),$
 $J(k f) = \int_0^1 k f(x) dx = k \int_0^1 f(x) dx = k J(f) \ (\forall f, g \in V).$

5.2 1次変換の性質 → 線形写像の性質 ; 核と像

定理 1

$T : V \rightarrow W$: 線形写像.

- (a) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;
- (b) $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ ($\forall \mathbf{v} \in V$);
- (c) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$ ($\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$).

(証明) (a) $T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0})$. $\therefore T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(b) $T(-\mathbf{v}) = T((-1) \cdot \mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$.

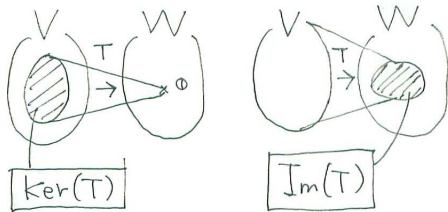
(c) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(-\mathbf{v}) \stackrel{(b)}{=} T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$. □

定義 (核, 像)

$T : V \rightarrow W$: 線形写像.

$\text{Ker}(T) := \{v \in V \mid T(v) = 0\}$: T の核 ; (核 $\cdots$ kernel)

$\text{Im}(T) := \{T(v) \mid v \in V\}$: T の像 . (像 $\cdots$ image)



例

$T = T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$ (A は $m \times n$ 行列).

$\text{Ker}(T_A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$: 連立方程式の解空間 ;

$\text{Im}(T_A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \{b \in \mathbb{R}^m \mid Ax = b (x \in \mathbb{R}^n)\}$

$= \{b \in \mathbb{R}^m \mid b \in C(A)\} = C(A).$

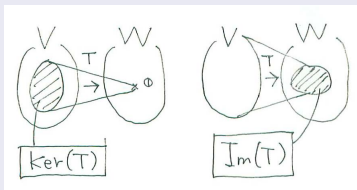
定理 14

定理 2

$T : V \rightarrow W$: 線形写像.

(a) $\text{Ker}(T) \subset V$: 部分空間 ;

(b) $\text{Im}(T) \subset W$: 部分空間.



(証明) (a) $v_1, v_2 \in \text{Ker}(T), k \in \mathbb{R} \Rightarrow v_1 + v_2, k v_1 \in \text{Ker}(T)$ を示せばよい. ($\because$ 4 章定理 4 より和とスカラー倍で閉じていればよい)

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0. \quad \therefore v_1 + v_2 \in \text{Ker}(T).$$

$$T(k v_1) = k T(v_1) = k 0 = 0. \quad \therefore k v_1 \in \text{Ker}(T).$$

(b) $w_1, w_2 \in \text{Im}(T), k \in \mathbb{R} \Rightarrow w_1 + w_2, k w_1 \in \text{Im}(T)$ を示せばよい.

$$w_1, w_2 \in \text{Im}(T) \Rightarrow \exists u_1, u_2 \in V \text{ s.t. } T(u_1) = w_1, T(u_2) = w_2.$$

$$\therefore w_1 + w_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2) \in \text{Im}(T),$$

$$k w_1 = k T(u_1) = T(k u_1) \in \text{Im}(T).$$

□

注意

$T : V \rightarrow W$: 線形写像, $\{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n\} : V$ の基底.

$$V \ni \mathbb{v} = k_1 \mathbb{v}_1 + \dots + k_n \mathbb{v}_n \Rightarrow T(\mathbb{v}) = k_1 T(\mathbb{v}_1) + \dots + k_n T(\mathbb{v}_n).$$

$\mathbb{v}$ の行先 $T(\mathbb{v})$ は基底 $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ の行先 $T(\mathbb{v}_1), \dots, T(\mathbb{v}_n)$ で決まる!