

はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

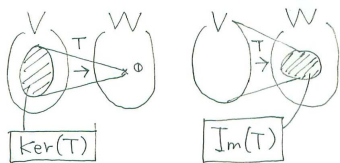
定義 (T の階数, T の核次元)

V, W : 線形空間, $T : V \rightarrow W$: 線形写像.

$\text{rank}(T) := \dim(\text{Im}(T))$: T の 階数 ;

$\text{nullity}(T) := \dim(\text{Ker}(T))$: T の 核次元 (退化次数).

(核 = kernel = null space)



例

$T = T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ (A は $m \times n$ 行列).

$\text{rank}(T_A) = \dim(\text{Im}(T_A)) \underset{\text{定理 14}}{=} \dim(C(A)) = \text{rank}(A)$;

$\text{nullity}(T_A) = \dim(\text{Ker}(T_A)) = \dim(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\})$

: 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の 解空間の次元.

- $\text{rank}(T)$ と $\text{nullity}(T)$ に関係はあるか？

▶ (今後の授業で) 準同型定理 として一般化される重要な定理：

定理 3 (次元定理)

V, W : 線形空間, $T : V \rightarrow W$: 線形写像, $\dim(V) = n$

$\Rightarrow \text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = n$.

(証明) 定義より, $\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T)) = n$ を示せばよい.

$\dim(\text{Im}(T)) = 0 \Leftrightarrow T : \text{ゼロ写像} \Leftrightarrow r := \dim(\text{Ker}(T)) = \dim(V) = n$
より, $r < n$ とし, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r : \text{Ker}(T)$ の基底をとる ($r = 0$ のときは,
何もとらなくてよい). 4 章定理 9 より,

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ が V の基底とできる (基底の延長).

このとき, $S = \{T(\mathbf{v}_{r+1}), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ ($|S| = n - r$) が $\text{Im}(T)$ の基底を
なすことをいえば, 証明おわり.

(1) $S = \{T(\mathbf{v}_{r+1}), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ は 1 次独立.

$$k_{r+1}T(\mathbf{v}_{r+1}) + \dots + k_nT(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow T(k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \dots + k_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \dots + k_n\mathbf{v}_n \in \text{Ker}(T) = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$$

$$\Rightarrow k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \dots + k_n\mathbf{v}_n = \exists k_1\mathbf{v}_1 + \dots + \exists k_r\mathbf{v}_r$$

$$\Rightarrow -k_1\mathbf{v}_1 - \dots - k_r\mathbf{v}_r + k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \dots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow k_1 = \dots = k_n = 0. (\because \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \text{ は 1 次独立})$$

(2) $\text{Im}(T) = \text{Span } S$.

$$\mathbf{b} \in \text{Im}(T) \Rightarrow \exists \mathbf{v} \in V \text{ s.t. } T(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$$

$$\Rightarrow T(\mathbf{v}) = T(c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \dots + c_n\mathbf{v}_n)$$

$$= c_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_rT(\mathbf{v}_r) + c_{r+1}T(\mathbf{v}_{r+1}) + \dots + c_nT(\mathbf{v}_n)$$

$$= c_1 \mathbf{0} + \dots + c_r \mathbf{0} + c_{r+1}T(\mathbf{v}_{r+1}) + \dots + c_nT(\mathbf{v}_n)$$

$$= c_{r+1}T(\mathbf{v}_{r+1}) + \dots + c_nT(\mathbf{v}_n) (= \mathbf{b}).$$

$$(\because \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in \text{Ker}(T))$$



定理 4 (定理 3 の系)

$A : m \times n$ 行列. 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間の次元は $n - \text{rank}(A)$.

(証明) $T = T_A$ のとき, $\text{rank}(T_A) = \text{rank}(A)$,
 $\text{nullity}(T_A) = \dim(\text{Ker}(T_A)) = \dim(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\})$: 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間の次元であった (上の例). $\square$

例

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rank}(A) = 3$

$\Rightarrow$ 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間 W の次元 $= 5 - 3 = 2$.

実際, $\dim(W) = 2$ であった (第 6 回の例).

- すなわち, 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は見た目上は 4 本であるが, 実際は 3 本分で, 解は $5 - 3 = 2$ 次元分ある.

5.3 1次変換と行列 → 線形写像と行列

$T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \Rightarrow T_A$ は線形写像であった。

実は、この逆が成り立つ：

命題

$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$: 線形写像

$\Rightarrow \exists A : m \times n$ 行列 s.t. $T = T_A$.

(証明) $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n$ の標準基底に対して,

$A = (T(\mathbf{e}_1) \cdots T(\mathbf{e}_n))$ とする. (この A を T の標準行列 という)

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$T(\mathbf{x}) = x_1T(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n),$$

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= x_1T(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n). \quad \therefore T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}. \quad \therefore T = T_A.$$



例

線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$ の標準行列 A は,

$$A = (T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2) \ T(\mathbf{e}_3)) = (T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \ T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \ T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 次に、一般の $T : V \rightarrow W$: 線形写像に対し、
 “ T の行列 A ” を得る方法を述べる． それには、
 $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} : V$ の基底, $B' = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\} : W$ の基底,

$$\begin{array}{ccc}
 T : V & \longrightarrow & W \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \mathbf{x} & \longmapsto & T(\mathbf{x}) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 [\mathbf{x}]_B & \longmapsto & [T(\mathbf{x})]_{B'} \\
 \cap & & \cap \\
 \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

に対して, $[T(\mathbf{x})]_{B'} = A [\mathbf{x}]_B$ をみたす $m \times n$ 行列 A をとればよい.

特に, $\mathbf{x} = \mathbf{v}_i$ とすれば, $[\mathbf{v}_i]_B = \mathbf{e}_i$ (標準単位ベクトル) で,

$$[T(\mathbf{v}_i)]_{B'} = A [\mathbf{v}_i]_B = A \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} : A \text{ の } i \text{ 列より},$$

$$A = ([T(\mathbf{v}_1)]_{B'} \cdots [T(\mathbf{v}_n)]_{B'}).$$

(A を基底 B, B' に関する T の行列 という. 特に, T が 1 次変換
 $(V = W)$ で $B = B'$ のとき, (単に) 基底 B に関する T の行列 という.)

▶ cf. 基底変換問題の解 (第 10 回) (cf. $\cdots$ 比較, 参照せよの意)