はじめに　(線形代数 IIA)

線形代数 II　＝　線形代数 I のつづき

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

4.2 線形空間

注意

教科書では「線型」を使っているが，この授業では「線形」を使う．
「線型空間」$\longrightarrow$「線形空間」

V : 集合

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ $\underset{\text{一般化}}{\rightsquigarrow}$ V : 線形空間

注意

$\exists!$ は「一意的 (ただ一つ) に存在」($\exists 1$ も同様)
$\exists\sim$s.t. $\cdots$ の s.t. は such that の略で $\cdots$ をみたすような

定義 (線形空間 V)　[$\mathbb{C}$ 上や体 K 上もあるがこの授業では扱わない]

V : 集合，$\forall \mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w} \in V$, $\forall k, l \in \mathbb{R}$ が次の 10 個の公理をみたすとき，V を ($\mathbb{R}$ 上の)線形空間，元 $\mathbb{u} \in V$ を ベクトル という．

公理 1. $\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$, 和 $\mathbb{u} + \mathbb{v} \in V$ が定義されている．

2. $\mathbb{u} + \mathbb{v} = \mathbb{v} + \mathbb{u}$　(交換法則)
3. $\mathbb{u} + (\mathbb{v} + \mathbb{w}) = (\mathbb{u} + \mathbb{v}) + \mathbb{w}$　(結合法則)
4. $\exists! \mathbb{o} \in V$ s.t. $\mathbb{u} + \mathbb{o} = \mathbb{o} + \mathbb{u} = \mathbb{u}$
5. $\forall \mathbb{u} \in V$ $\exists! -\mathbb{u} \in V$ s.t. $\mathbb{u} + (-\mathbb{u}) = (-\mathbb{u}) + \mathbb{u} = \mathbb{o}$

($\mathbb{o}$ を ゼロ・ベクトル，$-\mathbb{u}$ を $\mathbb{u}$ の逆元 という)

公理 6. $\mathbb{u} \in V$, $k \in \mathbb{R}$, スカラー倍 $k\,\mathbb{u} \in V$ が定義されている．

7. $k(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = k\,\mathbb{u} + k\,\mathbb{v}$　(分配法則 1)
8. $(k + l)\mathbb{u} = k\,\mathbb{u} + l\,\mathbb{u}$　(分配法則 2)
9. $k(l\,\mathbb{u}) = (kl)\mathbb{u}$
10. $1 \cdot \mathbb{u} = \mathbb{u}$

注意

$\mathbb{R}^n$ は公理 1〜10 をみたし線形空間．(ほかにも色々な線形空間がある)

例

$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0\}$ 原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面は線形空間. (ベクトル (a,b,c) と直交する平面 $(a,b,c)\bullet(x,y,z)=0$)

$\because$ $\mathbb{R}^3$ は線形空間であり, $V\subset\mathbb{R}^3$ より V は公理 2,3,7,8,9,10 をみたす.
($\mathbb{R}^3$ 全体で成立)

(公理 1) $\mathbb{u}=(u_1,u_2,u_3), \mathbb{v}=(v_1,v_2,v_3)\in V$
$\Rightarrow au_1+bu_2+cu_3=0,\ av_1+bv_2+cv_3=0$
$\Rightarrow a(u_1+v_1)+b(u_2+v_2)+c(u_3+v_3)=0$
$\Rightarrow \mathbb{u}+\mathbb{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)\in V$.
(公理 4) $\mathbb{o}=(0,0,0)\in V$.
(公理 5) $-\mathbb{u}=(-u_1,-u_2,-u_3)\in V$.
($\because au_1+bu_2+cu_3=0\Rightarrow a(-u_1)+b(-u_2)+c(-u_3)=0$)
(公理 6) $k\mathbb{u}=(ku_1,ku_2,ku_3)\in V$.
($\because au_1+bu_2+cu_3=0\Rightarrow a(ku_1)+b(ku_2)+c(ku_3)=k(au_1+bu_2+cu_3)=k\cdot 0=0$).

例

$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=at, y=bt, z=ct\,(t\in\mathbb{R})\}$　原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の直線は線形空間.

$\because$ 省略．上の例と同様．(各自考えてみる)

例

$V=M_{m,n}=\{$ 実数成分の $m\times n$ 行列 $\}$ は線形空間.

$\because$ 和：行列の和，ゼロ・ベクトル：零行列 $\mathbf{O}$,

逆元：A の逆元は $-A$，スカラー倍：行列のスカラー倍 kA.

例

$V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$　$\mathbb{R}$ 上の実数値関数全体は線形空間.

$\because$ 和：$(f+g)(x):=f(x)+g(x)$, ゼロ・ベクトル：$f=0$,

逆元：f の逆元は $-f$, スカラー倍：$(kf)(x):=k\,f(x)$.

例

$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ は線形空間でない.
$\because$ $(1,1) \in V$ だが逆元 $-(1,1) = (-1,-1) \notin V$.

例

$V = \{\mathbb{o}\}$　ゼロ・ベクトルからなる 1 点集合は線形空間.
例えば，$V = \{(0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

例

$V = \{$ 実数列 $\{a_n\}\}$　実数列全体は線形空間.
$\because$ $a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\}$ に対して，
和：$a + b := \{a_n + b_n\}$, ゼロ・ベクトル：$\{0\} = \{0,0,0,\cdots\}$,
逆元：a の逆元は $-a := \{-a_n\}$, スカラー倍：$ka := \{ka_n\}$.

例

$V = \mathbb{R}[X] = \{f = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}, n \geq 0\}$　実数係数の 1 変数多項式全体は線形空間.
$\because$ 和：多項式の和 $f+g$，ゼロ・ベクトル：$0 \in \mathbb{R}$,
逆元：f の逆元は $-f$, スカラー倍：$kf \in V$.

例

$V = \mathbb{R}[X]_n = \{f = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$　n 次以下の実数係数の 1 変数多項式全体は線形空間.
$\because$ 和：多項式の和 $f+g$，ゼロ・ベクトル：$0 \in \mathbb{R}$,
逆元：f の逆元は $-f$, スカラー倍：$kf \in V$.

- 教 pp.161～163 の練習問題 4.2 を各自やってみる

定理 3

V : 線形空間, $\mathbb{u} \in V$, $k \in \mathbb{R}$.
(a) $0 \cdot \mathbb{u} = \mathbb{o}$.　(b) $k \cdot \mathbb{o} = \mathbb{o}$.　(c) $(-1) \cdot \mathbb{u} = -\mathbb{u}$.
(d) $k \cdot \mathbb{u} = \mathbb{o} \Rightarrow k = 0$ または $\mathbb{u} = \mathbb{o}$.

(証明) (公理 1 から公理 10 のみを用いて示す)
(a) $0 \cdot \mathbb{u} + 0 \cdot \mathbb{u} \underset{公理\ 8}{=} (0+0) \cdot \mathbb{u} = 0 \cdot \mathbb{u}$. 公理 5 より $0 \cdot \mathbb{u}$ の逆元 $-0 \cdot \mathbb{u}$ が存在し，両辺に足すと $(0 \cdot \mathbb{u} + 0 \cdot \mathbb{u}) + (-0 \cdot \mathbb{u}) = 0 \cdot \mathbb{u} + (-0 \cdot \mathbb{u}) \underset{公理\ 3,5}{\Rightarrow}$
$0 \cdot \mathbb{u} + (0 \cdot \mathbb{u} + (-0 \cdot \mathbb{u})) = \mathbb{o} \underset{公理\ 5}{\Rightarrow} 0 \cdot \mathbb{u} + \mathbb{o} = \mathbb{o} \underset{公理\ 4}{\Rightarrow} 0 \cdot \mathbb{u} = \mathbb{o}$.
(b) $k \cdot \mathbb{o} \underset{公理\ 4}{=} k \cdot (\mathbb{o} + \mathbb{o}) \underset{公理\ 7}{=} k \cdot \mathbb{o} + k \cdot \mathbb{o}$. よって公理 5 より，$k \cdot \mathbb{o}$ の逆元 $-k \cdot \mathbb{o}$ をとれば (a) と同様. (c) $\mathbb{u} + (-1) \cdot \mathbb{u} \underset{公理\ 10}{=} 1 \cdot \mathbb{u} + (-1) \cdot \mathbb{u}$
$\underset{公理\ 8}{=} (1-1) \cdot \mathbb{u} = 0 \cdot \mathbb{u} \underset{公理\ 9}{=} \mathbb{o}$. よって，$-\mathbb{u} = (-1) \cdot \mathbb{u}$.
(d) (背理法) $k \neq 0$ かつ $\mathbb{u} \neq \mathbb{o}$ を仮定. $k \cdot \mathbb{u} = \mathbb{o}$ の両辺に $\frac{1}{k}$ をかけて，
(左辺) $\frac{1}{k}(k \cdot \mathbb{u}) \underset{公理\ 9}{=} 1 \cdot \mathbb{u} \underset{公理\ 10}{=} \mathbb{u}$
(右辺) $\frac{1}{k} \cdot \mathbb{o} \underset{(b)}{=} \mathbb{o}$. よって $\mathbb{u} = \mathbb{o}$ となり矛盾. □