

はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

4.5 基底と次元

1次元, 2次元, 3次元, ... 次元とは何か？

定義 (基底)

V : 線形空間.

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ が V の 基底

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} (1) \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \text{ は 1 次独立} \\ (2) \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \text{ は } V \text{ を張る (i.e. } V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}) \end{cases}$$

例

$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n$ の標準単位ベクトル.
 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は 1 次独立であり, $\forall \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ は
 $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n$ とかける, i.e. $\mathbb{R}^n = \text{Span}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.
 $\therefore \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底.

例

$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (2, 9, 0), \mathbf{v}_3 = (3, 3, 4) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底.

$\therefore \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ が 1 次独立を示すには,

$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$ を示せばよい. これは,

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = k_1(1, 2, 1) + k_2(2, 9, 0) + k_3(3, 3, 4) = (k_1 + 2k_2 + 3k_3, 2k_1 + 9k_2 + 3k_3, k_1 + 4k_3) \text{ より,}$$

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = 0 \\ k_1 + 4k_3 = 0 \end{cases} \text{ の解が } (k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0) \text{ のみをいえばよい.}$$

$\mathbb{R}^3 = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ となるには, $\forall \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ が

$\mathbf{b} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$ とかければよい. これは,

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = b_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = b_2 \\ k_1 + 4k_3 = b_3 \end{cases} \text{ が } \forall \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \text{ に対して, 解ければよい.}$$

しかし, これはどちらも $\det A \neq 0$ をいえばよい.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ より, } A \text{ は可逆. } \therefore \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ の基底.}$$

例

$1, X, \dots, X^n$ は $\mathbb{R}[X]_n$ (n 次以下の多項式全体) の基底.

$\because c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n = 0 \Rightarrow c_0 = \dots = c_n = 0$ より, $1, X, \dots, X^n$ は 1 次独立. $\forall f(X) \in \mathbb{R}[X]_n$ は, $f(X) = c_0 \cdot 1 + c_1X + \dots + c_nX^n$ とかける. i.e. $\mathbb{R}[X]_n = \text{Span}\{1, X, \dots, X^n\}$.

例

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は $M_{2,2}$ (2×2 行列全体) の基底.

$\because aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 = \mathbf{O}$ (零行列) $\Rightarrow a = b = c = d = 0$ より, M_1, M_2, M_3, M_4 は 1 次独立. $\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}$ は, $M = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4$ とかける. i.e. $M_{2,2} = \text{Span}\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$.

例

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V : 1 \text{ 次独立} \Rightarrow \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ は $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ の基底.

定義 (有限次元, 無限次元)

V : 線形空間, $V \neq \{0\}$.

V が 有限次元 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ V は有限個のベクトルからなる基底をもつ.
 V は有限次元でないとき, 無限次元 という.

例

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]_n$ (n 次以下の多項式全体), $M_{2,2}$ (2×2 行列全体) は有限次元.
 $\mathbb{R}[X]$ (多項式全体) は無限次元.

定理 7

V : 線形空間, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$: V の基底.

V の $n+1$ 個以上のベクトルは 1 次従属. ($V = \mathbb{R}^n$ のときが定理 6)

(証明) $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in V$ ($m \geq n+1$) とする. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ は基底より,

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 = a_{11}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n \\ \vdots \\ \mathbf{w}_m = a_{1m}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{nm}\mathbf{v}_n. \end{cases}$$

$$k_1\mathbf{w}_1 + \cdots + k_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} k_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n) + \cdots + k_m(a_{1m}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{nm}\mathbf{v}_n) = \\ (k_1a_{11} + \cdots + k_ma_{1m})\mathbf{v}_1 + \cdots + (k_1a_{n1} + \cdots + k_ma_{nm})\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立より,

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + \cdots + a_{1m}k_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}k_1 + \cdots + a_{nm}k_m = 0. \end{cases}$$

これを $k_1, \dots, k_m$ についての連立 1 次方程式とみなすと, 変数の個数 $= m > n =$ 方程式の本数より, $(k_1, \dots, k_m) \neq (0, \dots, 0)$ なる解がある.

(定理 6 と同様に教 p.31 定理 1) $\therefore \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ は 1 次従属. □

定理 8

有限次元の線形空間 V の基底は (常に) 一定の個数のベクトルからなる.

(証明) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ と $\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_m$ を V の基底とする.

$\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_m$ は 1 次独立より, $m \leq n$. (定理 7 の対偶)

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立より, $n \leq m$. (定理 7 の対偶)

$\therefore m = n$. □

定義 (次元)

V : 線形空間, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$: 基底のとき, (定理 8 より) V の次元は n であるといい, $\dim V = n$ とかく. ($\dim \{\mathbf{0}\} := 0$ とする.)

例

$\dim \mathbb{R}^n = n, \dim \mathbb{R}[X]_n = n + 1, \dim M_{2,2} = 4. \quad (\dim M_{m,n} = mn)$