はじめに　(線形代数 IIA)

線形代数 II　＝　線形代数 I のつづき

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

4.7 内積空間

4.7 内積空間

定義 (内積，内積空間)

V：線形空間. (一般には，$V \neq \mathbb{R}^n$ に注意)
$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$ に次をみたす $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle \in \mathbb{R}$ を対応させる写像を V 上の <u>内積</u> という:

4.7 内積空間

定義 (内積，内積空間)

V : 線形空間.（一般には，$V \neq \mathbb{R}^n$ に注意）
$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$ に次をみたす $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle \in \mathbb{R}$ を対応させる写像を V 上の 内積 という:

(1) $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = \langle \mathbb{v}, \mathbb{u} \rangle$;

4.7 内積空間

定義 (内積，内積空間)

V：線形空間.（一般には，$V \neq \mathbb{R}^n$ に注意）
$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$ に次をみたす $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle \in \mathbb{R}$ を対応させる写像を V 上の <u>内積</u> という:

(1) $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = \langle \mathbb{v}, \mathbb{u} \rangle$;

(2) $\langle \mathbb{u} + \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle = \langle \mathbb{u}, \mathbb{w} \rangle + \langle \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle$;

4.7 内積空間

定義 (内積，内積空間)

V：線形空間.（一般には，$V \neq \mathbb{R}^n$ に注意）
$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$ に次をみたす $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle \in \mathbb{R}$ を対応させる写像を V 上の 内積 という:

(1) $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = \langle \mathbb{v}, \mathbb{u} \rangle$;
(2) $\langle \mathbb{u} + \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle = \langle \mathbb{u}, \mathbb{w} \rangle + \langle \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle$;
(3) $\langle k\, \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = k \langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle$ $(k \in \mathbb{R})$;

定義 (内積，内積空間)

V : 線形空間. (一般には，$V \neq \mathbb{R}^n$ に注意)
$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$ に次をみたす $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle \in \mathbb{R}$ を対応させる写像を V 上の <u>内積</u> という:

(1) $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = \langle \mathbb{v}, \mathbb{u} \rangle$;
(2) $\langle \mathbb{u} + \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle = \langle \mathbb{u}, \mathbb{w} \rangle + \langle \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle$;
(3) $\langle k\,\mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = k \langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle$ $(k \in \mathbb{R})$;
(4) $\langle \mathbb{v}, \mathbb{v} \rangle \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow \mathbb{v} = \mathbb{o}$.

4.7 内積空間

定義 (内積，内積空間)

V : 線形空間.（一般には，$V \neq \mathbb{R}^n$ に注意）
$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$ に次をみたす $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle \in \mathbb{R}$ を対応させる写像を V 上の 内積 という:

(1) $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = \langle \mathbb{v}, \mathbb{u} \rangle$;
(2) $\langle \mathbb{u} + \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle = \langle \mathbb{u}, \mathbb{w} \rangle + \langle \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle$;
(3) $\langle k\, \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = k \langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle$ $(k \in \mathbb{R})$;
(4) $\langle \mathbb{v}, \mathbb{v} \rangle \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow \mathbb{v} = \mathbb{o}$.

内積をもった (定義された) 線形空間 V を 内積空間 という.

4.7 内積空間

定義 (内積，内積空間)

V : 線形空間.（一般には，$V \neq \mathbb{R}^n$ に注意）
$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$ に次をみたす $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle \in \mathbb{R}$ を対応させる写像を V 上の 内積 という:
(1) $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = \langle \mathbb{v}, \mathbb{u} \rangle$;
(2) $\langle \mathbb{u} + \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle = \langle \mathbb{u}, \mathbb{w} \rangle + \langle \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle$;
(3) $\langle k\, \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = k \langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle$ $(k \in \mathbb{R})$;
(4) $\langle \mathbb{v}, \mathbb{v} \rangle \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{v} = \mathbb{o}$.
内積をもった (定義された) 線形空間 V を 内積空間 という.

注意

(1)〜(4) より，内積は以下をみたす : (各自確認する)
(i) $\langle \mathbb{o}, \mathbb{v} \rangle = \langle \mathbb{v}, \mathbb{o} \rangle = 0$;
(ii) $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} + \mathbb{w} \rangle = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle + \langle \mathbb{u}, \mathbb{w} \rangle$;
(iii) $\langle \mathbb{u}, k\, \mathbb{v} \rangle = k \langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle$.

例

(1) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle := \mathbb{u} \bullet \mathbb{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$. (ユークリッド内積)

例

(1) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle := \mathbb{u} \bullet \mathbb{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$. (ユークリッド内積)

(2) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle := 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2$.

例

(1) $V=\mathbb{R}^n$, $\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle := \mathbb{u}\bullet\mathbb{v} = u_1v_1+\cdots+u_nv_n$. (ユークリッド内積)
(2) $V=\mathbb{R}^2$, $\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle := 3u_1v_1+2u_2v_2$.
(3) $V=M_{2,2}\ni A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4\end{pmatrix}$,
$\langle A,B\rangle := a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$.

例

(1) $V=\mathbb{R}^n$, $\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle := \mathbb{u}\bullet\mathbb{v} = u_1v_1+\cdots+u_nv_n$. (ユークリッド内積)
(2) $V=\mathbb{R}^2$, $\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle := 3u_1v_1+2u_2v_2$.
(3) $V=M_{2,2}\ni A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$,
$\langle A,B\rangle := a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$.
(4) $V=\mathbb{R}[X]_2\ni \mathbb{p}=a_0+a_1X+a_2X^2, \mathbb{q}=b_0+b_1X+b_2X^2$,
$\langle \mathbb{p},\mathbb{q}\rangle := a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$.

例

(1) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle := \mathbb{u} \bullet \mathbb{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$. (ユークリッド内積)
(2) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle := 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2$.
(3) $V = M_{2,2} \ni A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$,
$\langle A, B \rangle := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$.
(4) $V = \mathbb{R}[X]_2 \ni \mathbb{p} = a_0 + a_1 X + a_2 X^2, \mathbb{q} = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$,
$\langle \mathbb{p}, \mathbb{q} \rangle := a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$.
(5) $V = \mathbb{R}[X]_n \ni p(x), q(x)$, $\langle p(x), q(x) \rangle := \int_b^a p(x) q(x) dx$.

例

(1) $V=\mathbb{R}^n$, $\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle := \mathbb{u}\bullet\mathbb{v} = u_1v_1+\cdots+u_nv_n$. (ユークリッド内積)
(2) $V=\mathbb{R}^2$, $\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle := 3u_1v_1+2u_2v_2$.
(3) $V=M_{2,2}\ni A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$,
$\langle A,B\rangle := a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$.
(4) $V=\mathbb{R}[X]_2\ni \mathbb{p}=a_0+a_1X+a_2X^2, \mathbb{q}=b_0+b_1X+b_2X^2$,
$\langle \mathbb{p},\mathbb{q}\rangle := a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$.
(5) $V=\mathbb{R}[X]_n\ni p(x),q(x)$, $\langle p(x),q(x)\rangle := \int_b^a p(x)q(x)dx$.

定理 15 (コーシー・シュワルツの不等式)

V：内積空間．$\mathbb{u},\mathbb{v}\in V$ に対して，$\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle^2 \le \langle \mathbb{u},\mathbb{u}\rangle\langle \mathbb{v},\mathbb{v}\rangle$.

例

(1) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle := \mathbb{u} \bullet \mathbb{v} = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$. (ユークリッド内積)
(2) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle := 3u_1v_1 + 2u_2v_2$.
(3) $V = M_{2,2} \ni A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$,
$\langle A, B \rangle := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$.
(4) $V = \mathbb{R}[X]_2 \ni \mathbb{p} = a_0 + a_1X + a_2X^2, \mathbb{q} = b_0 + b_1X + b_2X^2$,
$\langle \mathbb{p}, \mathbb{q} \rangle := a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$.
(5) $V = \mathbb{R}[X]_n \ni p(x), q(x)$, $\langle p(x), q(x) \rangle := \int_b^a p(x)q(x)dx$.

定理 15 (コーシー・シュワルツの不等式)

V：内積空間．$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$ に対して，$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbb{u}, \mathbb{u} \rangle \langle \mathbb{v}, \mathbb{v} \rangle$.

(証明) $t \in \mathbb{R}$. $0 \leq \langle t\mathbb{u} + \mathbb{v}, t\mathbb{u} + \mathbb{v} \rangle = \langle \mathbb{u}, \mathbb{u} \rangle t^2 + 2\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle t + \langle \mathbb{v}, \mathbb{v} \rangle =$
$at^2 + bt + c$ より，$b^2 - 4ac \leq 0$. $\therefore$ $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbb{u}, \mathbb{u} \rangle \langle \mathbb{v}, \mathbb{v} \rangle$. □

例

(1) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle := \mathbb{u} \bullet \mathbb{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$. (ユークリッド内積)
(2) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle := 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2$.
(3) $V = M_{2,2} \ni A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$,
$\langle A, B \rangle := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$.
(4) $V = \mathbb{R}[X]_2 \ni \mathbb{p} = a_0 + a_1 X + a_2 X^2, \mathbb{q} = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$,
$\langle \mathbb{p}, \mathbb{q} \rangle := a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$.
(5) $V = \mathbb{R}[X]_n \ni p(x), q(x)$, $\langle p(x), q(x) \rangle := \int_b^a p(x) q(x) dx$.

定理 15 (コーシー・シュワルツの不等式)

V：内積空間．$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$ に対して，$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbb{u}, \mathbb{u} \rangle \langle \mathbb{v}, \mathbb{v} \rangle$.

(証明) $t \in \mathbb{R}$. $0 \leq \langle t\mathbb{u} + \mathbb{v}, t\mathbb{u} + \mathbb{v} \rangle = \langle \mathbb{u}, \mathbb{u} \rangle t^2 + 2\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle t + \langle \mathbb{v}, \mathbb{v} \rangle =$
$at^2 + bt + c$ より，$b^2 - 4ac \leq 0$. $\therefore \langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbb{u}, \mathbb{u} \rangle \langle \mathbb{v}, \mathbb{v} \rangle$. □

例

$V = \mathbb{R}^n$, $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle := \mathbb{u} \bullet \mathbb{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$. (ユークリッド内積)
$(u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n)^2 \leq (u_1^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + \cdots + v_n^2)$：コーシーの不等式

4.8　内積空間における「長さ」「角」

4.8　内積空間における「長さ」「角」

定義 (ノルム，距離)

V : 内積空間.

$\mathbb{u} \in V$ の <u>ノルム</u>　$||\mathbb{u}|| := \langle \mathbb{u}, \mathbb{u} \rangle^{\frac{1}{2}}$

$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$ の間の <u>距離</u>　$d(\mathbb{u}, \mathbb{v}) := ||\mathbb{u} - \mathbb{v}||$.　(距離 $\cdots$ distance)

4.8 内積空間における「長さ」「角」

定義 (ノルム，距離)

V : 内積空間.

$\mathbb{u} \in V$ の ノルム $\quad ||\mathbb{u}|| := \langle \mathbb{u}, \mathbb{u} \rangle^{\frac{1}{2}}$

$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$ の間の 距離 $\quad d(\mathbb{u}, \mathbb{v}) := ||\mathbb{u} - \mathbb{v}||$. $\quad$ (距離 $\cdots$ distance)

注意

内積空間 V に与えられた内積 $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle$ ごとにノルムと距離が定まる.

4.8 内積空間における「長さ」「角」

定義 (ノルム，距離)

V：内積空間.

$\mathbb{u} \in V$ の ノルム $\quad ||\mathbb{u}|| := \langle \mathbb{u}, \mathbb{u} \rangle^{\frac{1}{2}}$

$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$ の間の 距離 $\quad d(\mathbb{u}, \mathbb{v}) := ||\mathbb{u} - \mathbb{v}||.$ $\quad$ (距離 $\cdots$ distance)

注意

内積空間 V に与えられた内積 $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle$ ごとにノルムと距離が定まる.

例

$V = \mathbb{R}^n$, $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle := \mathbb{u} \bullet \mathbb{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$：ユークリッド内積.

$||\mathbb{u}|| = \langle \mathbb{u}, \mathbb{u} \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$：ユークリッドノルム.

$d(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = ||\mathbb{u} - \mathbb{v}|| = \langle \mathbb{u} - \mathbb{v}, \mathbb{u} - \mathbb{v} \rangle^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$：ユークリッド距離.

定理 16

	長さ	距離
(1)	$\|\|\mathbb{u}\|\| \geq 0;$	$d(\mathbb{u}, \mathbb{v}) \geq 0;$
(2)	$\|\|\mathbb{u}\|\| = 0 \Leftrightarrow \mathbb{u} = \mathbb{o};$	$d(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{u} = \mathbb{v};$
(3)	$\|\|k\,\mathbb{u}\|\| = \|k\| \cdot \|\|\mathbb{u}\|\|;$	$d(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = d(\mathbb{v}, \mathbb{u});$
(4)	$\|\|\mathbb{u} + \mathbb{v}\|\| \leq \|\|\mathbb{u}\|\| + \|\|\mathbb{v}\|\|;$	$d(\mathbb{u}, \mathbb{v}) \leq d(\mathbb{u}, \mathbb{w}) + d(\mathbb{w}, \mathbb{v}).$

(証明) 略．(教 pp.206〜207) (特に，(4) は 3 角不等式 とよばれる)

コーシー・シュワルツの不等式より，

コーシー・シュワルツの不等式より，
$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle^2 \leq \langle \mathbb{u}, \mathbb{u}\rangle\langle \mathbb{v}, \mathbb{v}\rangle = ||\mathbb{u}||^2 \cdot ||\mathbb{v}||^2$. よって，$\left(\frac{\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle}{||\mathbb{u}||\cdot||\mathbb{v}||}\right)^2 \leq 1$.

コーシー・シュワルツの不等式より，

$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle^2 \leq \langle \mathbb{u}, \mathbb{u}\rangle\langle \mathbb{v}, \mathbb{v}\rangle = ||\mathbb{u}||^2 \cdot ||\mathbb{v}||^2$. よって，$\left(\frac{\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle}{||\mathbb{u}||\cdot||\mathbb{v}||}\right)^2 \leq 1$.

$\therefore\ -1 \leq \frac{\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle}{||\mathbb{u}||\cdot||\mathbb{v}||} \leq 1$ より，$\cos\theta = \frac{\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle}{||\mathbb{u}||\cdot||\mathbb{v}||}$ $(0 \leq \exists\theta \leq \pi)$.

- この θ を $\underline{\mathbb{u}\text{ と }\mathbb{v}\text{ のなす角}}$ という

コーシー・シュワルツの不等式より,

$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle^2 \leq \langle \mathbb{u}, \mathbb{u}\rangle\langle \mathbb{v}, \mathbb{v}\rangle = ||\mathbb{u}||^2 \cdot ||\mathbb{v}||^2$. よって, $\left(\frac{\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle}{||\mathbb{u}||\cdot||\mathbb{v}||}\right)^2 \leq 1$.

$\therefore\ -1 \leq \frac{\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle}{||\mathbb{u}||\cdot||\mathbb{v}||} \leq 1$ より, $\cos\theta = \frac{\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle}{||\mathbb{u}||\cdot||\mathbb{v}||}$ $(0 \leq \exists\theta \leq \pi)$.

- この θ を $\mathbb{u}$ と $\mathbb{v}$ のなす角 という

定義 (直交)

$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$ が 直交 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle = 0$ $(\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2})$.

コーシー・シュワルツの不等式より,

$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle^2 \leq \langle \mathbb{u}, \mathbb{u}\rangle\langle \mathbb{v}, \mathbb{v}\rangle = ||\mathbb{u}||^2 \cdot ||\mathbb{v}||^2$. よって, $\left(\frac{\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle}{||\mathbb{u}||\cdot||\mathbb{v}||}\right)^2 \leq 1$.

$\therefore\ -1 \leq \frac{\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle}{||\mathbb{u}||\cdot||\mathbb{v}||} \leq 1$ より, $\cos\theta = \frac{\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle}{||\mathbb{u}||\cdot||\mathbb{v}||}$ $(0 \leq \exists\theta \leq \pi)$.

- この θ を $\mathbb{u}$ と $\mathbb{v}$ のなす角 という

定義 (直交)

$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$ が 直交 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle = 0$ $(\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2})$.

定理 17 (一般化されたピタゴラスの定理)

$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle = 0 \Rightarrow ||\mathbb{u} + \mathbb{v}||^2 = ||\mathbb{u}||^2 + ||\mathbb{v}||^2$.

コーシー・シュワルツの不等式より，

$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle^2 \leq \langle \mathbb{u}, \mathbb{u}\rangle\langle \mathbb{v}, \mathbb{v}\rangle = ||\mathbb{u}||^2 \cdot ||\mathbb{v}||^2$. よって，$\left(\frac{\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle}{||\mathbb{u}||\cdot||\mathbb{v}||}\right)^2 \leq 1$.

$\therefore\ -1 \leq \frac{\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle}{||\mathbb{u}||\cdot||\mathbb{v}||} \leq 1$ より，$\cos\theta = \frac{\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle}{||\mathbb{u}||\cdot||\mathbb{v}||}$ $(0 \leq \exists\theta \leq \pi)$.

- この θ を $\mathbb{u}$ と $\mathbb{v}$ のなす角 という

定義 (直交)

$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$ が 直交 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle = 0$ $(\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2})$.

定理 17 (一般化されたピタゴラスの定理)

$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle = 0 \Rightarrow ||\mathbb{u}+\mathbb{v}||^2 = ||\mathbb{u}||^2 + ||\mathbb{v}||^2$.

(証明) $||\mathbb{u}+\mathbb{v}||^2 = \langle \mathbb{u}+\mathbb{v}, \mathbb{u}+\mathbb{v}\rangle$

$= \langle \mathbb{u}, \mathbb{u}\rangle + 2\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle + \langle \mathbb{v}, \mathbb{v}\rangle$

$= ||\mathbb{u}||^2 + 2\cdot 0 + ||\mathbb{v}||^2$. $\square$

コーシー・シュワルツの不等式より，

$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle^2 \leq \langle \mathbb{u}, \mathbb{u}\rangle\langle \mathbb{v}, \mathbb{v}\rangle = ||\mathbb{u}||^2 \cdot ||\mathbb{v}||^2$. よって，$\left(\frac{\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle}{||\mathbb{u}||\cdot||\mathbb{v}||}\right)^2 \leq 1$.

$\therefore\ -1 \leq \frac{\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle}{||\mathbb{u}||\cdot||\mathbb{v}||} \leq 1$ より，$\cos\theta = \frac{\langle \mathbb{u},\mathbb{v}\rangle}{||\mathbb{u}||\cdot||\mathbb{v}||}$ $(0 \leq \exists\theta \leq \pi)$.

- この θ を $\mathbb{u}$ と $\mathbb{v}$ のなす角 という

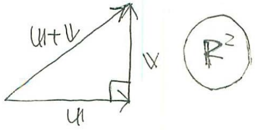
定義 (直交)

$\mathbb{u}, \mathbb{v} \in V$ が 直交 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle = 0$ $(\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2})$.

定理 17 (一般化されたピタゴラスの定理)

$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle = 0 \Rightarrow ||\mathbb{u}+\mathbb{v}||^2 = ||\mathbb{u}||^2 + ||\mathbb{v}||^2$.

(証明) $||\mathbb{u}+\mathbb{v}||^2 = \langle \mathbb{u}+\mathbb{v}, \mathbb{u}+\mathbb{v}\rangle$
$= \langle \mathbb{u}, \mathbb{u}\rangle + 2\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}\rangle + \langle \mathbb{v}, \mathbb{v}\rangle$
$= ||\mathbb{u}||^2 + 2\cdot 0 + ||\mathbb{v}||^2$. $\square$



4.9　直交基底；グラム・シュミットの方法

定義 (直交集合，正規直交集合)

V：内積空間．(内積 $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle$ が定義された線形空間)

$S \subset V$：直交集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = 0$ $(\forall \mathbb{u}, \mathbb{v} \in S, \mathbb{u} \neq \mathbb{v})$

$S \subset V$：正規直交集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ S は直交集合かつ $||\mathbb{u}|| = 1$ $(\forall \mathbb{u} \in S)$.

定義 (直交集合，正規直交集合)

V：内積空間．(内積 $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle$ が定義された線形空間)

$S \subset V$：<u>直交集合</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = 0 \ (\forall \mathbb{u}, \mathbb{v} \in S, \mathbb{u} \neq \mathbb{v})$

$S \subset V$：<u>正規直交集合</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ S は直交集合かつ $||\mathbb{u}|| = 1 \ (\forall \mathbb{u} \in S)$.

- "正規" $\leftrightarrow$ $||\mathbb{u}|| = 1$ $\leftrightarrow$ "ノルム $= 1$"

定義 (直交集合，正規直交集合)

V : 内積空間．(内積 $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle$ が定義された線形空間)

$S \subset V$: 直交集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = 0$ $(\forall \mathbb{u}, \mathbb{v} \in S, \mathbb{u} \neq \mathbb{v})$

$S \subset V$: 正規直交集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ S は直交集合かつ $||\mathbb{u}|| = 1$ $(\forall \mathbb{u} \in S)$.

- "正規" $\leftrightarrow$ $||\mathbb{u}|| = 1$ $\leftrightarrow$ "ノルム $= 1$"

例

$\mathbb{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbb{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \mathbb{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{R}^3$.

$S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ は正規直交集合.

$\because$ $\langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2 \rangle = \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_3 \rangle = \langle \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3 \rangle = 0$ かつ $||\mathbb{v}_1|| = ||\mathbb{v}_2|| = ||\mathbb{v}_3|| = 1$.

定義 (直交集合，正規直交集合)

V : 内積空間．(内積 $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle$ が定義された線形空間)

$S \subset V$: 直交集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = 0$ $(\forall \mathbb{u}, \mathbb{v} \in S, \mathbb{u} \neq \mathbb{v})$

$S \subset V$: 正規直交集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ S は直交集合かつ $||\mathbb{u}|| = 1$ $(\forall \mathbb{u} \in S)$.

- "正規" $\leftrightarrow$ $||\mathbb{u}|| = 1$ $\leftrightarrow$ "ノルム $= 1$"

例

$\mathbb{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbb{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \mathbb{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{R}^3$.

$S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ は正規直交集合.

$\because$ $\langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2 \rangle = \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_3 \rangle = \langle \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3 \rangle = 0$ かつ $||\mathbb{v}_1|| = ||\mathbb{v}_2|| = ||\mathbb{v}_3|| = 1$.

例

$\mathbb{0} \neq \mathbb{v} \in V$ に対して，$\mathbb{v}' := \frac{\mathbb{v}}{||\mathbb{v}||}$ とすれば，$||\mathbb{v}'|| = \frac{1}{||\mathbb{v}||} \cdot ||\mathbb{v}|| = 1$.

4.9 直交基底；グラム・シュミットの方法

定義 (直交集合，正規直交集合)

V：内積空間．(内積 $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle$ が定義された線形空間)

$S \subset V$：直交集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = 0$ $(\forall \mathbb{u}, \mathbb{v} \in S, \mathbb{u} \neq \mathbb{v})$

$S \subset V$：正規直交集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ S は直交集合かつ $||\mathbb{u}|| = 1$ $(\forall \mathbb{u} \in S)$.

- "正規" $\leftrightarrow$ $||\mathbb{u}|| = 1$ $\leftrightarrow$ "ノルム $= 1$"

例

$\mathbb{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbb{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \mathbb{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{R}^3$.

$S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ は正規直交集合.

$\because$ $\langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2 \rangle = \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_3 \rangle = \langle \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3 \rangle = 0$ かつ $||\mathbb{v}_1|| = ||\mathbb{v}_2|| = ||\mathbb{v}_3|| = 1$.

例

$\mathbb{o} \neq \mathbb{v} \in V$ に対して，$\mathbb{v}' := \frac{\mathbb{v}}{||\mathbb{v}||}$ とすれば，$||\mathbb{v}'|| = \frac{1}{||\mathbb{v}||} \cdot ||\mathbb{v}|| = 1$.

- $\mathbb{v}$ から "ノルム $= 1$" の $\mathbb{v}'$ を作ることを 正規化 という