

はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス

[LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

定理 18

V : 内積空間, (\cdots 内積空間とは内積が定義された線形空間のことだった)

$S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$: V の正規直交基底 (正規直交集合かつ基底).

$\forall \mathbf{u} \in V$ に対して, $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$.

(証明) $\mathbf{u} = k_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + k_n \mathbf{v}_n \Rightarrow k_i = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle$ ($i = 1, \dots, n$) を示す.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle k_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + k_n \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle$$

$$= k_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + k_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + k_n \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle$$

$$= k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i \cdot 1 + \cdots + k_n \cdot 0 = k_i.$$

($\because \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = 0$ ($i \neq j$), $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\|^2 = 1$) □

▶ 内積 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle$ を求めるだけで, 1次結合の係数がわかる!

例

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right), \mathbf{v}_3 = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) \in \mathbb{R}^3.$$

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ は \mathbb{R}^3 の正規直交基底. (各自確認する)

$\mathbf{u} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ は, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = 1$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle = -\frac{1}{5}$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle = \frac{7}{5}$ より,

$$\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{v}_1 - \frac{1}{5} \cdot \mathbf{v}_2 + \frac{7}{5} \cdot \mathbf{v}_3.$$

定理 19

V : 内積空間. $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ ($\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$) : 直交集合
 $\Rightarrow \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立.

(証明) $k_1\mathbf{v}_1 + \dots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow k_i = 0$ を示す.

$$k_1\mathbf{v}_1 + \dots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \langle k_1\mathbf{v}_1 + \dots + k_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

$$\Rightarrow k_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + \dots + k_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle + \dots + k_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

$$\Rightarrow k_1 \cdot 0 + \dots + k_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle + \dots + k_n \cdot 0 = 0 \Rightarrow k_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0 \Rightarrow k_i = 0.$$

$$(\because \mathbf{v}_i \neq \mathbf{0} \text{ より } \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\|^2 \neq 0)$$

□

例

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \mathbb{R}^3.$$

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ は正規直交集合. (前回)

定理 19 より, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は 1 次独立.

よって, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ と定理 9 より, S は \mathbb{R}^3 の正規直交基底.

定理 20

V : 内積空間, $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$: 正規直交集合.

$W = \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow \forall u \in V$ は $u = w_1 + w_2$

$w_1 := \langle u, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n \in W$

$w_2 := u - w_1 = u - \langle u, v_1 \rangle v_1 - \dots - \langle u, v_n \rangle v_n \in W^\perp$

とかける. 但し, $W^\perp := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \ (\forall w \in W)\}$.

(証明) $w_2 \in W^\perp$ を示せばよい. $W = \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ より,
 $\langle w_2, v_i \rangle = 0$ ($i = 1, \dots, n$) を示せばよい. (定理 19 から S は W の基底)

$$\begin{aligned}\langle w_2, v_i \rangle &= \langle u - w_1, v_i \rangle = \langle u, v_i \rangle - \langle w_1, v_i \rangle \\ &= \langle u, v_i \rangle - \langle \langle u, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle u, v_i \rangle v_i + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n, v_i \rangle \\ &= \langle u, v_i \rangle - \langle u, v_1 \rangle \langle v_1, v_i \rangle - \dots - \langle u, v_i \rangle \langle v_i, v_i \rangle - \dots - \langle u, v_n \rangle \langle v_n, v_i \rangle \\ &= \langle u, v_i \rangle - \langle u, v_1 \rangle \cdot 0 - \dots - \langle u, v_i \rangle \cdot 1 - \dots - \langle u, v_n \rangle \cdot 0 = 0. \\ (\because \langle v_i, v_j \rangle &= 0 \ (i \neq j), \langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2 = 1) \quad \square\end{aligned}$$

定理 20

V : 内積空間, $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$: 正規直交集合.

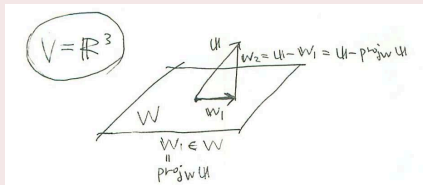
$W = \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow \forall u \in V$ は $u = w_1 + w_2$

$w_1 := \langle u, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n \in W$

$w_2 := u - w_1 = u - \langle u, v_1 \rangle v_1 - \dots - \langle u, v_n \rangle v_n \in W^\perp$

とかける. 但し, $W^\perp := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \ (\forall w \in W)\}$.

注意と定義



$w_1 := \langle u, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n \in W$ を u の W への正射影 といい, $\text{proj}_W u$ とかく.

$w_2 := u - w_1 = u - \langle u, v_1 \rangle v_1 - \dots - \langle u, v_n \rangle v_n = u - \text{proj}_W u \in W^\perp$ を u の W に関する直交成分 という.

例

$$W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right), \mathbf{u} = (1, 1, 1) \text{ とすれば,}$$

$$\mathbf{w}_1 = \text{proj}_W \mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2$$

$$= 1 \cdot \mathbf{v}_1 + \left(-\frac{1}{5}\right) \mathbf{v}_2 = \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) \in W : \mathbf{u} \text{ の } W \text{ への正射影.}$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = \mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}$$

$$= (1, 1, 1) - \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) = \left(\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25}\right) \in W^\perp : \mathbf{u} \text{ の } W \text{ に関する直交成分}$$

定理 21 (グラム・シュミットの正規直交化法)

有限次元内積空間 $V \neq \{0\}$ は正規直交基底をもつ。

(証明) V : 内積空間, $\dim V = n > 0$. V の基底を 1 つとり, u_1, \dots, u_n とする. この u_1, \dots, u_n から正規直交基底 v_1, \dots, v_n をつくる.

Step 1. $v_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|}$ ($\Rightarrow \|v_1\| = 1$).

Step 2. v_1 に直交する $\|v_2\| = 1$ なる v_2 をつくる. それには, u_2 の $W_1 = \text{Span}\{v_1\}$ に関する直交成分 $u_2 - w_1 = u_2 - \text{proj}_{W_1} u_2$ を正規化して, $v_2 := \frac{u_2 - \text{proj}_{W_1} u_2}{\|u_2 - \text{proj}_{W_1} u_2\|} = \frac{u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1\|}$ とすればよい.

Step 3. v_1, v_2 に直交する $\|v_3\| = 1$ なる v_3 をつくる. それには, u_3 の $W_2 = \text{Span}\{v_1, v_2\}$ に関する直交成分 $u_3 - w_2 = u_3 - \text{proj}_{W_2} u_3$ を正規化して, $v_3 := \frac{u_3 - \text{proj}_{W_2} u_3}{\|u_3 - \text{proj}_{W_2} u_3\|} = \frac{u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2}{\|u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2\|}$ とすればよい.

これを繰り返して, 正規直交基底 v_1, \dots, v_n をえる. \square

例

ユークリッド内積をもったユークリッド空間 \mathbb{R}^3 の基底

$u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1)$ から

グラム・シュミットの正規直交化法で正規直交基底 v_1, v_2, v_3 をつくる.

Step 1. $v_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

Step 2. $v_2 := \frac{u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1\|}.$ ここで,

$$u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = (0, 1, 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ より,}$$

$$\|u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\therefore v_2 = \frac{3}{\sqrt{6}} \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Step 3. $v_3 := \frac{u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2}{\|u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2\|}.$ ここで,

$$u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 = (0, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = (0, 0, 1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ より,}$$

$$\|u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2\| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore v_3 = \sqrt{2} \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$