はじめに　(数学基礎 B2)

$\boxed{\text{数学基礎 B} \quad = \quad \text{線形代数}}$

教科書　「要点明解 線形数学」培風館

(第１章　行列)

(第２章　連立１次方程式)

- 第３章　行列式
- 第４章　行列の対角化

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 ⟶ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

連立1次方程式 $\begin{cases} ax+by &= e \\ cx+dy &= f \end{cases}$ を考える．

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ より，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ x = \frac{de-bf}{ad-bc},\ y = \frac{-ce+af}{ad-bc}.$$

$ad-bc$ を A の行列式という．

- 以上を $A : n \times n$ 行列のときに考える!!

n 次正方行列 A の行列式を $|A|$, $\det(A)$ とかき，以下で定義する：

- $n=1 \quad A=(a_{11})$
  $|A| := |a_{11}| = a_{11}.$ $\cdots$ $|A| = |(a_{11})|$ を略して $|a_{11}|$ とかく
- $n=2 \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
  $|A| := a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$
- $n=3 \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$|A| := a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

注意

$n=3$ のとき，

$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ は,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-6) - 1 \cdot 0 - 2 \cdot 18 = -42.$$

▶ $n \geq 2$ (一般の場合)

$$|A| := a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| - a_{14}|A_{14}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}|A_{1n}|.$$

但し,

$$A_{1i} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{1,i-1}} & \cancel{a_{1i}} & \cancel{a_{1,i+1}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{1n}} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & \cancel{a_{2i}} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \cancel{} & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & \cancel{a_{ni}} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(A_{1i} は A から第 1 行と第 i 列を取り除いた $(n-1) \times (n-1)$ 行列)

例

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot \left(0 - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) - (-1) \cdot \left(0 - 0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -2 \cdot \Big(-3 \cdot (4-0) + 2 \cdot (3-0) \Big) - (-1) \cdot \Big(+3 \cdot (2-0) \Big)$$

$$= -2 \cdot \Big(-12 + 6 \Big) - (-1) \cdot \Big(6 \Big) = 12 + 6 = 18.$$

注意

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ は行列．(行列式) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ は数 (整数)． $\cdots$ 区別する

3.2 行列式の計算法

定理 3.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注意

これをくり返せば,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}.$$

定理 3.2

A : n 次正方行列, A^{T} : A の転置行列 $\Rightarrow |A^{\mathrm{T}}| = |A|$.

例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A^{\mathrm{T}}| = ad - bc = |A|.$$

定理 3.3 (← 定理 3.1+ 定理 3.2)

$$\begin{vmatrix} \color{blue}{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \color{blue}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定理 3.4

A の 2 つの行を入れかえた行列 A' に対して，$|A'| = -|A|$.

例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow |A'| = cb - da = -(ad - bc) = -|A|.$$

定理 3.5

$A = A' \Rightarrow |A| = 0.$ （A の 2 つの行が等しい $\Rightarrow |A| = 0.$）

$\because\ |A| = |A'| \overset{\text{定理 3.4}}{=} -|A|$. よって，$2|A| = 0$ より $|A| = 0$.