はじめに　(数学基礎 B2)

数学基礎 B　＝　線形代数

教科書　「要点明解 線形数学」培風館

(第 1 章　行列)

(第 2 章　連立 1 次方程式)

- 第 3 章　行列式
- 第 4 章　行列の対角化

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 ⟶ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

定理 3.6

n 次正方行列 A のある行を k 倍した行列 A'' に対して，$|A''| = k|A|$.

定理 3.6

n 次正方行列 A のある行を k 倍した行列 A'' に対して，$|A''| = k|A|$.

例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ A'' = \begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix}$$

定理 3.6

n 次正方行列 A のある行を k 倍した行列 A'' に対して，$|A''| = k|A|$.

例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ A'' = \begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A''| = kad - kbc = k(ad - bc) = k|A|.$$

定理 3.7

n 次正方行列 A のある行が行ベクトルの和 $\mathbb{a}+\mathbb{a}'$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\mathbb{a}+\mathbb{a}'} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\mathbb{a}} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\mathbb{a}'} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定理 3.7

n 次正方行列 A のある行が行ベクトルの和 $\mathbb{a} + \mathbb{a}'$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \mathbb{a} + \mathbb{a}' & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \mathbb{a} & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \mathbb{a}' & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例

$$A = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

定理 3.7

n 次正方行列 A のある行が行ベクトルの和 $\mathbb{a} + \mathbb{a}'$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \mathbb{a} + \mathbb{a}' & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \mathbb{a} & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \mathbb{a}' & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例

$$A = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = (a + a')d - (b + b')c$$

定理 3.7

n 次正方行列 A のある行が行ベクトルの和 $\mathbb{a} + \mathbb{a}'$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \mathbb{a} + \mathbb{a}' & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \mathbb{a} & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \mathbb{a}' & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例

$$A = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = (a + a')d - (b + b')c$$

$$= (ad - bc) + (a'd - b'c) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}.$$

定理 3.8

n 次正方行列 A のある (i) 行に他の行 (j) 行の k 倍を加えた行列 A''' に対して，$|A'''| = |A|$.

定理 3.8

n 次正方行列 A のある (i) 行に他の行 (j) 行の k 倍を加えた行列 A''' に対して，$|A'''| = |A|$.

$$\because \quad |A'''| = \begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_i + k\,\mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_n \end{vmatrix}$$

定理 3.8

n 次正方行列 A のある (i) 行に他の行 (j) 行の k 倍を加えた行列 A''' に対して，$|A'''| = |A|$.

$$\because \quad |A'''| = \begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_i + k\,\mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_n \end{vmatrix} \overset{3.7}{=} \begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_i \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 \\ k\,\mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_n \end{vmatrix}$$

定理 3.8

n 次正方行列 A のある (i) 行に他の行 (j) 行の k 倍を加えた行列 A''' に対して，$|A'''| = |A|$.

$$\because \quad |A'''| = \begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_i + k\,\mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_n \end{vmatrix} \overset{3.7}{=} \begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_i \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 \\ k\,\mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_n \end{vmatrix} \overset{3.6}{=} |A| + k \begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_n \end{vmatrix}$$

定理 3.8

n 次正方行列 A のある (i) 行に他の行 (j) 行の k 倍を加えた行列 A''' に対して，$|A'''| = |A|$.

$$\because \quad |A'''| = \begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_i + k\,\mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_n \end{vmatrix} \overset{3.7}{=} \begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_i \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 \\ k\,\mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_n \end{vmatrix} \overset{3.6}{=} |A| + k \begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.5}{=} |A| + k \cdot 0 = |A|.$$

まとめると …

まとめると … 3つの行基本変形 I, II, III に対して,

まとめると … 3 つの行基本変形 I, II, III に対して,

$\boxed{\mathrm{I}}$ 行列 A の 2 つの行を入れかえた行列を A'

まとめると … 3 つの行基本変形 I, II, III に対して,

$\boxed{\text{I}}$ 行列 A の 2 つの行を入れかえた行列を A'

$\boxed{\text{II}}$ 行列 A のある行を k 倍した行列を A''

まとめると … 3つの行基本変形 I, II, III に対して,

$\boxed{\text{I}}$ 行列 A の2つの行を入れかえた行列を A'

$\boxed{\text{II}}$ 行列 A のある行を k 倍した行列を A''

$\boxed{\text{III}}$ 行列 A のある行に他の行の k 倍をたした行列を A'''

まとめると ⋯ 3 つの行基本変形 I, II, III に対して,

$\boxed{\text{I}}$ 行列 A の 2 つの行を入れかえた行列を A'

$\boxed{\text{II}}$ 行列 A のある行を k 倍した行列を A''

$\boxed{\text{III}}$ 行列 A のある行に他の行の k 倍をたした行列を A'''

とすると,

まとめると $\cdots$ 3 つの行基本変形 I, II, III に対して,

$\boxed{\mathrm{I}}$ 行列 A の 2 つの行を入れかえた行列を A'

$\boxed{\mathrm{II}}$ 行列 A のある行を k 倍した行列を A''

$\boxed{\mathrm{III}}$ 行列 A のある行に他の行の k 倍をたした行列を A'''

とすると,

$|A'| = -|A| \ \cdots$ (1),

$|A''| = k|A| \ \cdots$ (2)

$|A'''| = |A| \ \cdots$ (3)

まとめると $\cdots$ 3 つの行基本変形 I, II, III に対して,

$\boxed{\mathrm{I}}$ 行列 A の 2 つの行を入れかえた行列を A'
$\boxed{\mathrm{II}}$ 行列 A のある行を k 倍した行列を A''
$\boxed{\mathrm{III}}$ 行列 A のある行に他の行の k 倍をたした行列を A'''

とすると,

$|A'| = -|A|$ $\cdots$ (1),
$|A''| = k|A|$ $\cdots$ (2)
$|A'''| = |A|$ $\cdots$ (3)

となる.

まとめると $\cdots$ 3 つの行基本変形 I, II, III に対して,

$\boxed{\text{I}}$ 行列 A の 2 つの行を入れかえた行列を A'

$\boxed{\text{II}}$ 行列 A のある行を k 倍した行列を A''

$\boxed{\text{III}}$ 行列 A のある行に他の行の k 倍をたした行列を A'''

とすると,

$|A'| = -|A| \ \cdots$ (1),
$|A''| = k|A| \ \cdots$ (2)
$|A'''| = |A| \ \cdots$ (3)

となる．この (1), (2), (3) を用いれば，行基本変形 I, II, III によって,

まとめると … 3 つの行基本変形 I, II, III に対して，

$\boxed{\mathrm{I}}$ 行列 A の 2 つの行を入れかえた行列を A'

$\boxed{\mathrm{II}}$ 行列 A のある行を k 倍した行列を A''

$\boxed{\mathrm{III}}$ 行列 A のある行に他の行の k 倍をたした行列を A'''

とすると，

$|A'| = -|A| \ \cdots$ (1),
$|A''| = k|A| \ \cdots$ (2)
$|A'''| = |A| \ \cdots$ (3)

となる．この (1), (2), (3) を用いれば，行基本変形 I, II, III によって，

$$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} a & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

の形にできれば，(定理 3.3 より)

まとめると $\cdots$ 3 つの行基本変形 I, II, III に対して，

$\boxed{\mathrm{I}}$ 行列 A の 2 つの行を入れかえた行列を A'

$\boxed{\mathrm{II}}$ 行列 A のある行を k 倍した行列を A''

$\boxed{\mathrm{III}}$ 行列 A のある行に他の行の k 倍をたした行列を A'''

とすると，

$|A'| = -|A| \ \cdots$ (1),
$|A''| = k|A| \ \cdots$ (2)
$|A'''| = |A| \ \cdots$ (3)

となる．この (1), (2), (3) を用いれば，行基本変形 I, II, III によって，

$$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} a & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{の形にできれば，(定理 3.3 より)}$$

$|A|$ を $a \cdot |B|$ を用いて計算できる．

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \Big\updownarrow \\ \\ \end{array}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \end{array} \overset{\boxed{\mathrm{I}}}{=}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \overset{\boxed{\mathrm{I}}}{=} {\color{red}-} \begin{vmatrix} {\color{red}1} & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\mathrm{I}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times(-3)$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \end{matrix} \overset{\boxed{\text{I}}}{=} {\color{red}-} \begin{vmatrix} {\color{red}1} & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \downarrow \times (-3) \\ \\ \end{matrix} \overset{\boxed{\text{III}}}{=}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} -\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times (-3) \quad \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times (-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} -\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times (-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times(-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times(-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=}$$

例

$$\begin{vmatrix}3&2&1\\1&-2&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}\updownarrow \overset{\boxed{\mathrm{I}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\3&2&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\downarrow\times(-3) \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&8&4\\-1&1&1\end{vmatrix}\downarrow\times 1 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&8&4\\0&-1&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} -\begin{vmatrix}8&4\\-1&0\end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow \\ \\ \\ \end{array} \overset{\boxed{\text{I}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \big\downarrow \times(-3) \\ \\ \\ \end{array} \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \Big\downarrow \times 1 \\ \\ \end{array} \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} -\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times (-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} - \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} {\color{red}-} \begin{vmatrix} {\color{red}1} & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \big\downarrow \times(-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} {\color{red}1} & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Big\downarrow \times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} {\color{red}1} & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} - \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} {\color{red}1} & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \big\downarrow \times 3$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\mathrm{I}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times (-3) \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} -\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 3 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times(-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} - \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 3 \underset{=}{\boxed{\text{III}}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix}3&2&1\\1&-2&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}\updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\3&2&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\downarrow\times(-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&8&4\\-1&1&1\end{vmatrix}\Big\downarrow\times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&8&4\\0&-1&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} -\begin{vmatrix}8&4\\-1&0\end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix}1&2&3&-1\\-3&2&7&11\\0&5&9&16\\-2&0&1&6\end{vmatrix}\downarrow\times 3 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix}1&2&3&-1\\0&8&16&8\\0&5&9&16\\-2&0&1&6\end{vmatrix}\Bigg\downarrow\times 2$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\mathrm{I}}}{=} - \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times(-3) \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} - \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} - \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} - \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 3 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 2 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} {\color{red}-} \begin{vmatrix} {\color{red}1} & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times(-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} {\color{red}1} & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} {\color{red}1} & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} - \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} {\color{red}1} & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 3 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} {\color{red}1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 2 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} {\color{red}1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix}3&2&1\\1&-2&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}\updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} {\color{red}-}\begin{vmatrix}{\color{red}1}&-2&-1\\3&2&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\downarrow\times(-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix}{\color{red}1}&-2&-1\\0&8&4\\-1&1&1\end{vmatrix}\downarrow\times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix}{\color{red}1}&-2&-1\\0&8&4\\0&-1&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} -\begin{vmatrix}8&4\\-1&0\end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix}{\color{red}1}&2&3&-1\\-3&2&7&11\\0&5&9&16\\-2&0&1&6\end{vmatrix}\downarrow\times 3 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix}{\color{red}1}&2&3&-1\\0&8&16&8\\0&5&9&16\\-2&0&1&6\end{vmatrix}\downarrow\times 2 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix}{\color{red}1}&2&3&-1\\0&8&16&8\\0&5&9&16\\0&4&7&4\end{vmatrix} \overset{3.3}{=}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times(-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} -\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 3 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 2 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \overset{3.3}{=} \begin{vmatrix} 8 & 16 & 8 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix}3&2&1\\1&-2&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}\updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\3&2&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\downarrow\times(-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&8&4\\-1&1&1\end{vmatrix}\downarrow\times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&8&4\\0&-1&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} -\begin{vmatrix}8&4\\-1&0\end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix}1&2&3&-1\\-3&2&7&11\\0&5&9&16\\-2&0&1&6\end{vmatrix}\downarrow\times 3 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix}1&2&3&-1\\0&8&16&8\\0&5&9&16\\-2&0&1&6\end{vmatrix}\downarrow\times 2 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix}1&2&3&-1\\0&8&16&8\\0&5&9&16\\0&4&7&4\end{vmatrix} \overset{3.3}{=} \begin{vmatrix}8&16&8\\5&9&16\\4&7&4\end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\mathrm{I}}}{=} \textcolor{red}{-} \begin{vmatrix} \textcolor{red}{1} & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times(-3) \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} - \begin{vmatrix} \textcolor{red}{1} & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} - \begin{vmatrix} \textcolor{red}{1} & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} - \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} \textcolor{red}{1} & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 3 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} \begin{vmatrix} \textcolor{red}{1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 2 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} \begin{vmatrix} \textcolor{red}{1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \overset{3.3}{=} \begin{vmatrix} 8 & 16 & 8 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\mathrm{II}}}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} \textcolor{red}{1} & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times (-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} -\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 3 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 2 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \overset{3.3}{=} \begin{vmatrix} 8 & 16 & 8 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \downarrow \times (-5)$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} \textcolor{red}{-}\begin{vmatrix} \textcolor{red}{1} & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow\times(-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix} \textcolor{red}{1} & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow\times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix} \textcolor{red}{1} & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} -\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} \textcolor{red}{1} & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow\times 3 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} \textcolor{red}{1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow\times 2 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} \textcolor{red}{1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \overset{3.3}{=} \begin{vmatrix} 8 & 16 & 8 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=} 8\cdot\begin{vmatrix} \textcolor{red}{1} & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \downarrow\times(-5) \overset{\boxed{\text{III}}}{=}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times(-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} -\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 3 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 2 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \overset{3.3}{=} \begin{vmatrix} 8 & 16 & 8 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=} 8\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \downarrow \times(-5) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} 8\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 11 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix}3&2&1\\1&-2&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}\updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\3&2&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\downarrow\times(-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&8&4\\-1&1&1\end{vmatrix}\downarrow\times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&8&4\\0&-1&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} -\begin{vmatrix}8&4\\-1&0\end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix}1&2&3&-1\\-3&2&7&11\\0&5&9&16\\-2&0&1&6\end{vmatrix}\downarrow\times 3 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix}1&2&3&-1\\0&8&16&8\\0&5&9&16\\-2&0&1&6\end{vmatrix}\downarrow\times 2 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix}1&2&3&-1\\0&8&16&8\\0&5&9&16\\0&4&7&4\end{vmatrix} \overset{3.3}{=} \begin{vmatrix}8&16&8\\5&9&16\\4&7&4\end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=} 8\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\5&9&16\\4&7&4\end{vmatrix}\downarrow\times(-5) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} 8\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&11\\4&7&4\end{vmatrix}\downarrow\times(-4)$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} {\color{red}-} \begin{vmatrix} {\color{red}1} & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times(-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} {\color{red}1} & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} {\color{red}1} & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} - \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} {\color{red}1} & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 3 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} {\color{red}1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 2 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} {\color{red}1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \overset{3.3}{=} \begin{vmatrix} 8 & 16 & 8 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} {\color{red}1} & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \downarrow \times(-5) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} {\color{red}1} & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 11 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \downarrow \times(-4) \overset{\boxed{\text{III}}}{=}$$

例

$$\begin{vmatrix}3&2&1\\1&-2&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}\updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\3&2&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\downarrow\times(-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&8&4\\-1&1&1\end{vmatrix}\downarrow\times1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&8&4\\0&-1&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} -\begin{vmatrix}8&4\\-1&0\end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix}1&2&3&-1\\-3&2&7&11\\0&5&9&16\\-2&0&1&6\end{vmatrix}\downarrow\times3 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix}1&2&3&-1\\0&8&16&8\\0&5&9&16\\-2&0&1&6\end{vmatrix}\downarrow\times2 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix}1&2&3&-1\\0&8&16&8\\0&5&9&16\\0&4&7&4\end{vmatrix} \overset{3.3}{=} \begin{vmatrix}8&16&8\\5&9&16\\4&7&4\end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=} 8\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\5&9&16\\4&7&4\end{vmatrix}\downarrow\times(-5) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} 8\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&11\\4&7&4\end{vmatrix}\downarrow\times(-4) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} 8\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&11\\0&-1&0\end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times (-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} - \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 3 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 2 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \overset{3.3}{=} \begin{vmatrix} 8 & 16 & 8 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \downarrow \times (-5) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 11 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \downarrow \times (-4) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{3.3}{=}$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times(-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} - \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 3 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 2 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \overset{3.3}{=} \begin{vmatrix} 8 & 16 & 8 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \downarrow \times(-5) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 11 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \downarrow \times(-4) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{3.3}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 11 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix}3&2&1\\1&-2&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}\updownarrow \overset{\boxed{\mathrm{I}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\3&2&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\downarrow\times(-3) \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&8&4\\-1&1&1\end{vmatrix}\downarrow\times1 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} -\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&8&4\\0&-1&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} -\begin{vmatrix}8&4\\-1&0\end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix}1&2&3&-1\\-3&2&7&11\\0&5&9&16\\-2&0&1&6\end{vmatrix}\downarrow\times3 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} \begin{vmatrix}1&2&3&-1\\0&8&16&8\\0&5&9&16\\-2&0&1&6\end{vmatrix}\downarrow\times2 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} \begin{vmatrix}1&2&3&-1\\0&8&16&8\\0&5&9&16\\0&4&7&4\end{vmatrix} \overset{3.3}{=} \begin{vmatrix}8&16&8\\5&9&16\\4&7&4\end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\mathrm{II}}}{=} 8\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\5&9&16\\4&7&4\end{vmatrix}\downarrow\times(-5) \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} 8\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&11\\4&7&4\end{vmatrix}\downarrow\times(-4) \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} 8\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&11\\0&-1&0\end{vmatrix} \overset{3.3}{=} 8\cdot\begin{vmatrix}-1&11\\-1&0\end{vmatrix}$$

$$= 8\cdot 11$$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\text{I}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times(-3) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} - \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 3 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 2 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \overset{3.3}{=} \begin{vmatrix} 8 & 16 & 8 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \downarrow \times(-5) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 11 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \downarrow \times(-4) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{3.3}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 11 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \cdot 11 = 88.$$

例

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

例

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$$

例

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \begin{array}{c} \uparrow \\ | \end{array} \times 1 \begin{array}{c} \uparrow \\ | \\ | \end{array} \times 1$$

例

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \begin{array}{l} \uparrow \\ \rfloor \times 1 \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \\ \\ \rfloor \times 1 \end{array} \overset{\boxed{\text{III}}}{=}$$

例

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \begin{array}{l} \uparrow \\ \big| \times 1 \\ \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \\ \big| \times 1 \\ \big| \end{array} \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$$

例

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$ を因数分解せよ．

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \Big\uparrow \times 1 \Bigg\uparrow \times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=}$$

例

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \big| \times 1 \\ \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \big| \\ \big| \times 1 \end{matrix} \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=} (x+y+z) \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$$

例

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \uparrow\times 1 \;\uparrow\times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=} (x+y+z) \begin{vmatrix} {\color{red}\mathbf{1}} & 1 & 1 \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \downarrow\times(-y) \;\downarrow\times(-z)$$

例

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \Big\uparrow \times 1 \Bigg\uparrow \times 1 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\mathrm{II}}}{=} (x+y+z) \begin{vmatrix} \color{red}{\mathbf{1}} & 1 & 1 \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \Big\downarrow \times(-y) \Bigg\downarrow \times(-z) \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=}$$

例

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \times 1 \\ \uparrow \times 1 \end{matrix} \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=} (x+y+z) \begin{vmatrix} \color{red}{\mathbf{1}} & 1 & 1 \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \begin{matrix} \downarrow \times (-y) \\ \downarrow \times (-z) \end{matrix} \overset{\boxed{\text{III}}}{=} (x+y+z) \begin{vmatrix} \color{red}{\mathbf{1}} & 1 & 1 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-z \end{vmatrix}$$

例

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \uparrow\times 1 \uparrow\times 1 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\mathrm{II}}}{=} (x+y+z) \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \downarrow\times(-y) \downarrow\times(-z) \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} (x+y+z) \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-z \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=}$$

例

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \begin{array}{l} \uparrow \times 1 \\ \quad \uparrow \times 1 \end{array} \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=} (x+y+z) \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \begin{array}{l} \downarrow \times(-y) \\ \quad \downarrow \times(-z) \end{array} \overset{\boxed{\text{III}}}{=} (x+y+z) \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-z \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} (x+y+z) \begin{vmatrix} x-y & 0 \\ 0 & x-z \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$$ を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \uparrow\times 1 \ \uparrow\times 1 \ \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=} (x+y+z)\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \downarrow\times(-y) \ \downarrow\times(-z) \ \overset{\boxed{\text{III}}}{=} (x+y+z)\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-z \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} (x+y+z)\begin{vmatrix} x-y & 0 \\ 0 & x-z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-y)(x-z).$$

例

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \Big\uparrow \times 1 \Big\uparrow \times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=} (x+y+z) \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \Big\downarrow \times(-y) \Big\downarrow \times(-z) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} (x+y+z) \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-z \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.3}{=} (x+y+z) \begin{vmatrix} x-y & 0 \\ 0 & x-z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-y)(x-z).$$

注意

n 次正方行列 A に対して，定理 3.6 を n 回使うと，
$|kA| = k^n |A|$. $\cdots$ $|kA| \neq k|A|$ $(n \geq 2)$ に注意する