はじめに　(数学基礎 B2)

数学基礎 B　＝　線形代数

教科書　「要点明解 線形数学」培風館

(第 1 章　行列)

(第 2 章　連立 1 次方程式)

- 第 3 章　行列式
- 第 4 章　行列の対角化

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと.
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 ⟶ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

- $\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ の <u>内積</u> $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ $(= \mathbb{x}^{\mathrm{T}} \mathbb{y})$ が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{E}^n$ と書き，<u>n 次元ユークリッド空間</u> といった．

- $\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ の内積 $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ $(= \mathbb{x}^{\mathrm{T}} \mathbb{y})$ が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{E}^n$ と書き，n 次元ユークリッド空間といった．

定理 4.5 (コーシー・シュワルツの不等式)

$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ に対して，$|\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle| \leq ||\mathbb{x}|| \, ||\mathbb{y}||$.

- $\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ の 内積 $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ $(= \mathbb{x}^{\mathrm{T}} \mathbb{y})$ が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{E}^n$ と書き，n 次元ユークリッド空間 といった.

定理 4.5 (コーシー・シュワルツの不等式)

$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ に対して，$|\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle| \leq ||\mathbb{x}||\ ||\mathbb{y}||$.
等号成立 $\Leftrightarrow a\mathbb{x} + b\mathbb{y} = \mathbb{o}$ なる $a, b \in \mathbb{R}$ が存在.

- $\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ の 内積 $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \ (= \mathbb{x}^{\mathrm{T}} \mathbb{y})$ が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{E}^n$ と書き，n 次元ユークリッド空間 といった．

定理 4.5 (コーシー・シュワルツの不等式)

$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ に対して，$|\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle| \leq ||\mathbb{x}|| \ ||\mathbb{y}||$.
等号成立 $\Leftrightarrow a\mathbb{x} + b\mathbb{y} = \mathbb{o}$ なる $a, b \in \mathbb{R}$ が存在．

- 定理 4.5 より，$-1 \leq \dfrac{\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle}{||\mathbb{x}|| \ ||\mathbb{y}||} \leq 1.$

- $\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ の内積 $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ $(= \mathbb{x}^T \mathbb{y})$ が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{E}^n$ と書き，n 次元ユークリッド空間といった．

定理 4.5 (コーシー・シュワルツの不等式)

$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ に対して，$|\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle| \le ||\mathbb{x}||\ ||\mathbb{y}||$.
等号成立 $\Leftrightarrow$ $a\mathbb{x} + b\mathbb{y} = \mathbb{o}$ なる $a, b \in \mathbb{R}$ が存在．

- 定理 4.5 より，$-1 \le \dfrac{\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle}{||\mathbb{x}||\ ||\mathbb{y}||} \le 1$.

定義 (ベクトルのなす角，直交)

$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ $(\mathbb{x}, \mathbb{y} \ne \mathbb{o})$.

- $\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ の内積 $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ $(= \mathbb{x}^{\mathrm{T}} \mathbb{y})$ が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{E}^n$ と書き，n 次元ユークリッド空間といった．

定理 4.5 (コーシー・シュワルツの不等式)

$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ に対して，$|\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle| \leq ||\mathbb{x}||\ ||\mathbb{y}||$.
等号成立 $\Leftrightarrow a\mathbb{x} + b\mathbb{y} = \mathbb{o}$ なる $a, b \in \mathbb{R}$ が存在.

- 定理 4.5 より，$-1 \leq \dfrac{\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle}{||\mathbb{x}||\ ||\mathbb{y}||} \leq 1$.

定義 (ベクトルのなす角，直交)

$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ $(\mathbb{x}, \mathbb{y} \neq \mathbb{o})$.

$$\frac{\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle}{||\mathbb{x}||\ ||\mathbb{y}||} = \cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

- $\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ の内積 $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \ (= \mathbb{x}^T \mathbb{y})$ が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{E}^n$ と書き，n 次元ユークリッド空間といった．

定理 4.5 (コーシー・シュワルツの不等式)

$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ に対して，$|\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle| \leq ||\mathbb{x}|| \ ||\mathbb{y}||$.
等号成立 $\Leftrightarrow a\mathbb{x} + b\mathbb{y} = \mathbb{o}$ なる $a, b \in \mathbb{R}$ が存在.

- 定理 4.5 より，$-1 \leq \dfrac{\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle}{||\mathbb{x}|| \ ||\mathbb{y}||} \leq 1$.

定義 (ベクトルのなす角，直交)

$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n \ (\mathbb{x}, \mathbb{y} \neq \mathbb{o})$.

$$\frac{\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle}{||\mathbb{x}|| \ ||\mathbb{y}||} = \cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

なる θ がただ 1 つ存在し，$\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ のなす角という.

- $\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ の内積 $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ $(= \mathbb{x}^T \mathbb{y})$ が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{E}^n$ と書き，n 次元ユークリッド空間といった．

定理 4.5 (コーシー・シュワルツの不等式)

$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ に対して，$|\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle| \leq ||\mathbb{x}||\ ||\mathbb{y}||$.
等号成立 $\Leftrightarrow$ $a\mathbb{x} + b\mathbb{y} = \mathbb{o}$ なる $a, b \in \mathbb{R}$ が存在．

- 定理 4.5 より，$-1 \leq \dfrac{\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle}{||\mathbb{x}||\ ||\mathbb{y}||} \leq 1$.

定義 (ベクトルのなす角，直交)

$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ $(\mathbb{x}, \mathbb{y} \neq \mathbb{o})$.

$$\frac{\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle}{||\mathbb{x}||\ ||\mathbb{y}||} = \cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

なる θ がただ 1 つ存在し，$\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ のなす角という．

$\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = 0$ のとき，$\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ は直交するという．

- $\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ の内積 $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ $(= \mathbb{x}^{\mathrm{T}} \mathbb{y})$ が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{E}^n$ と書き，n 次元ユークリッド空間といった．

定理 4.5 (コーシー・シュワルツの不等式)

$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ に対して，$|\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle| \le ||\mathbb{x}||\ ||\mathbb{y}||$.
等号成立 $\Leftrightarrow a\mathbb{x} + b\mathbb{y} = \mathbb{o}$ なる $a, b \in \mathbb{R}$ が存在.

- 定理 4.5 より，$-1 \le \dfrac{\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle}{||\mathbb{x}||\ ||\mathbb{y}||} \le 1.$

定義 (ベクトルのなす角，直交)

$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ $(\mathbb{x}, \mathbb{y} \ne \mathbb{o})$.

$$\frac{\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle}{||\mathbb{x}||\ ||\mathbb{y}||} = \cos\theta \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

なる θ がただ 1 つ存在し，$\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ のなす角という.

$\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = 0$ のとき，$\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ は直交するという. (つまり，$\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$)

定義 (正射影，直交成分)

$\mathbb{v} \in \mathbb{E}^n$, 大きさ $||\mathbb{v}|| = 1$ とする.

定義 (正射影，直交成分)

$\mathbb{v} \in \mathbb{E}^n$, 大きさ $||\mathbb{v}|| = 1$ とする.

$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して,

定義 (正射影，直交成分)

$\mathbb{v} \in \mathbb{E}^n$, 大きさ $||\mathbb{v}|| = 1$ とする.

$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して,

$\langle \mathbb{x}, \mathbb{v} \rangle \mathbb{v}$ を $\mathbb{x}$ の $\mathbb{v}$ 方向への正射影,

定義 (正射影，直交成分)

$\mathbb{v} \in \mathbb{E}^n$, 大きさ $||\mathbb{v}|| = 1$ とする．

$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，

$\langle \mathbb{x}, \mathbb{v} \rangle \mathbb{v}$ を $\underline{\mathbb{x}\text{ の }\mathbb{v}\text{ 方向への正射影}}$，$\langle \mathbb{x}, \mathbb{v} \rangle$ を $\underline{\mathbb{v}\text{ 方向の成分}}$，

定義 (正射影，直交成分)

$\mathbb{v} \in \mathbb{E}^n$, 大きさ $||\mathbb{v}|| = 1$ とする.

$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して,

$\langle \mathbb{x}, \mathbb{v} \rangle \mathbb{v}$ を $\mathbb{x}$ の $\mathbb{v}$ 方向への正射影, $\langle \mathbb{x}, \mathbb{v} \rangle$ を $\mathbb{v}$ 方向の成分,

$\mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v} \rangle \mathbb{v}$ を $\mathbb{x}$ の $\mathbb{v}$ に関する直交成分 という.

定義 (正射影，直交成分)

$\mathbb{v} \in \mathbb{E}^n$, 大きさ $||\mathbb{v}|| = 1$ とする.

$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して,

$\langle \mathbb{x}, \mathbb{v} \rangle \mathbb{v}$ を $\mathbb{x}$ の $\mathbb{v}$ 方向への正射影，$\langle \mathbb{x}, \mathbb{v} \rangle$ を $\mathbb{v}$ 方向の成分,

$\mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v} \rangle \mathbb{v}$ を $\mathbb{x}$ の $\mathbb{v}$ に関する直交成分 という.

注意

実際，次のようになる：

定義 (正射影，直交成分)

$\mathbb{v} \in \mathbb{E}^n$, 大きさ $||\mathbb{v}|| = 1$ とする．

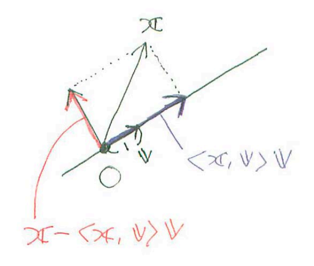
$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，

$\langle \mathbb{x}, \mathbb{v} \rangle \mathbb{v}$ を $\mathbb{x}$ の $\mathbb{v}$ 方向への正射影，$\langle \mathbb{x}, \mathbb{v} \rangle$ を $\mathbb{v}$ 方向の成分，

$\mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v} \rangle \mathbb{v}$ を $\mathbb{x}$ の $\mathbb{v}$ に関する直交成分という．

注意

実際，次のようになる：



定理 4.6

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k \in \mathbb{E}^n$ $(1 \leq k \leq n-1)$ は，大きさが 1，互いに直交しているとする．

定理 4.6

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k \in \mathbb{E}^n$ $(1 \leq k \leq n-1)$ は，大きさが 1，互いに直交しているとする．$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，

定理 4.6

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k \in \mathbb{E}^n$ $(1 \leq k \leq n-1)$ は，大きさが 1，互いに直交しているとする．$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，

$$\mathbb{x}' := \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k$$

定理 4.6

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k \in \mathbb{E}^n$ $(1 \leq k \leq n-1)$ は，大きさが 1，互いに直交しているとする．$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，

$$\mathbb{x}' := \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k$$

は，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k$ と直交する．

定理 4.6

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k \in \mathbb{E}^n$ $(1 \leq k \leq n-1)$ は，大きさが 1，互いに直交しているとする．$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，

$\mathbb{x}' := \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k$

は，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k$ と直交する．

$\because$ 例えば，$\mathbb{x}'$ と $\mathbb{v}_1$ が直交するのは，

定理 4.6

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k \in \mathbb{E}^n$ $(1 \leq k \leq n-1)$ は，大きさが 1，互いに直交しているとする．$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，

$$\mathbb{x}' := \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k$$

は，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k$ と直交する．

$\because$ 例えば，$\mathbb{x}'$ と $\mathbb{v}_1$ が直交するのは，

$\langle \mathbb{x}', \mathbb{v}_1 \rangle$

定理 4.6

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k \in \mathbb{E}^n$ $(1 \leq k \leq n-1)$ は，大きさが 1，互いに直交しているとする．$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，

$\mathbb{x}' := \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k$

は，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k$ と直交する．

$\because$ 例えば，$\mathbb{x}'$ と $\mathbb{v}_1$ が直交するのは，

$\langle \mathbb{x}', \mathbb{v}_1 \rangle = \langle \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k, \mathbb{v}_1 \rangle$

定理 4.6

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k \in \mathbb{E}^n$ $(1 \leq k \leq n-1)$ は，大きさが 1，互いに直交しているとする．$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，

$$\mathbb{x}' := \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k$$

は，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k$ と直交する．

$\because$ 例えば，$\mathbb{x}'$ と $\mathbb{v}_1$ が直交するのは，

$$\langle \mathbb{x}', \mathbb{v}_1 \rangle = \langle \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k, \mathbb{v}_1 \rangle$$
$$= \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \langle \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_1 \rangle - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \langle \mathbb{v}_k, \mathbb{v}_1 \rangle$$

定理 4.6

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k \in \mathbb{E}^n$ $(1 \leq k \leq n-1)$ は，大きさが 1，互いに直交しているとする．$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，

$$\mathbb{x}' := \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k$$

は，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k$ と直交する．

$\because$ 例えば，$\mathbb{x}'$ と $\mathbb{v}_1$ が直交するのは，

$$\langle \mathbb{x}', \mathbb{v}_1 \rangle = \langle \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k, \mathbb{v}_1 \rangle$$
$$= \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \langle \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_1 \rangle - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \langle \mathbb{v}_k, \mathbb{v}_1 \rangle$$
$$= \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \cdot \quad 1 \quad - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \cdot \quad 0 \quad - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \cdot \quad 0$$

定理 4.6

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k \in \mathbb{E}^n$ $(1 \leq k \leq n-1)$ は，大きさが 1，互いに直交しているとする．$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，

$$\mathbb{x}' := \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k$$

は，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k$ と直交する．

$\because$ 例えば，$\mathbb{x}'$ と $\mathbb{v}_1$ が直交するのは，

$$\begin{aligned}
\langle \mathbb{x}', \mathbb{v}_1 \rangle &= \langle \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k, \mathbb{v}_1 \rangle \\
&= \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \langle \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_1 \rangle - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \langle \mathbb{v}_k, \mathbb{v}_1 \rangle \\
&= \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \cdot \quad 1 \quad - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \cdot \quad 0 \quad - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \cdot \quad 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

のようにわかる．

定理 4.6

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k \in \mathbb{E}^n$ $(1 \leq k \leq n-1)$ は，大きさが 1，互いに直交しているとする．$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，

$\mathbb{x}' := \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k$

は，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k$ と直交する．

$\because$ 例えば，$\mathbb{x}'$ と $\mathbb{v}_1$ が直交するのは，

$\langle \mathbb{x}', \mathbb{v}_1 \rangle = \langle \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k, \mathbb{v}_1 \rangle$

$= \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \langle \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_1 \rangle - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \langle \mathbb{v}_k, \mathbb{v}_1 \rangle$

$= \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \cdot \quad 1 \quad - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \cdot \quad 0 \quad - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \cdot \quad 0$

$= 0$ のようにわかる．$(\because$ $\langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_1 \rangle = ||\mathbb{v}_1||^2 = 1$, $\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_1 \rangle = 0$ $(i \neq 1))$

定理 4.6

$\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_k \in \mathbb{E}^n$ $(1 \leq k \leq n-1)$ は，大きさが 1，互いに直交しているとする．$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，

$\mathbb{x}' := \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k$

は，$\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_k$ と直交する．

$\because$ 例えば，$\mathbb{x}'$ と $\mathbb{v}_1$ が直交するのは，

$\langle \mathbb{x}', \mathbb{v}_1 \rangle = \langle \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k, \mathbb{v}_1 \rangle$

$= \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \langle \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_1 \rangle - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \langle \mathbb{v}_k, \mathbb{v}_1 \rangle$

$= \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \cdot \quad 1 \quad - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \cdot \quad 0 \quad - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \cdot \quad 0$

$= 0$ のようにわかる．($\because$ $\langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_1 \rangle = ||\mathbb{v}_1||^2 = 1$, $\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_1 \rangle = 0$ $(i \neq 1)$)

$\mathbb{x}'$ と $\mathbb{v}_2, \dots, \mathbb{v}_k$ が直交することも同様にしてわかる．

定理 4.7 (グラム・シュミットの正規直交化法)

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{E}^n$.

定理 4.7 (グラム・シュミットの正規直交化法)

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{E}^n$.
行列 $Q = (\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n)$ は 正則を仮定する. $(|Q| \neq 0)$

定理 4.7 (グラム・シュミットの正規直交化法)

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{E}^n$.
行列 $Q = (\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n)$ は正則を仮定する. $(|Q| \neq 0)$
$\mathbb{p}_1 := \dfrac{\mathbb{v}_1}{||\mathbb{v}_1||}$.

定理 4.7 (グラム・シュミットの正規直交化法)

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{E}^n$.

行列 $Q = (\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n)$ は正則を仮定する. $(|Q| \neq 0)$

$\mathbb{p}_1 := \dfrac{\mathbb{v}_1}{||\mathbb{v}_1||}$.

$i = 2, \ldots, n$ に対して，順番に

定理 4.7 (グラム・シュミットの正規直交化法)

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{E}^n$.
行列 $Q = (\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n)$ は正則を仮定する. $(|Q| \neq 0)$

$\mathbb{p}_1 := \dfrac{\mathbb{v}_1}{||\mathbb{v}_1||}$.

$i = 2, \ldots, n$ に対して，順番に

$$\mathbb{p}_i := \frac{\mathbb{v}_i - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1 - \cdots - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_{i-1} \rangle \mathbb{p}_{i-1}}{||\mathbb{v}_i - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1 - \cdots - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_{i-1} \rangle \mathbb{p}_{i-1}||}$$

定理 4.7 (グラム・シュミットの正規直交化法)

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{E}^n$.
行列 $Q = (\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n)$ は正則を仮定する. $(|Q| \neq 0)$
$\mathbb{p}_1 := \dfrac{\mathbb{v}_1}{||\mathbb{v}_1||}$.

$i = 2, \ldots, n$ に対して，順番に

$$\mathbb{p}_i := \frac{\mathbb{v}_i - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1 - \cdots - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_{i-1} \rangle \mathbb{p}_{i-1}}{||\mathbb{v}_i - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1 - \cdots - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_{i-1} \rangle \mathbb{p}_{i-1}||}$$

とすれば，$P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は直交行列.

定理 4.7 (グラム・シュミットの正規直交化法)

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{E}^n$.
行列 $Q = (\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n)$ は正則を仮定する. $(|Q| \neq 0)$
$\mathbb{p}_1 := \dfrac{\mathbb{v}_1}{||\mathbb{v}_1||}$.

$i = 2, \ldots, n$ に対して，順番に

$$\mathbb{p}_i := \frac{\mathbb{v}_i - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1 - \cdots - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_{i-1} \rangle \mathbb{p}_{i-1}}{||\mathbb{v}_i - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1 - \cdots - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_{i-1} \rangle \mathbb{p}_{i-1}||}$$

とすれば，$P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は直交行列.

注意

前回の例より，

定理 4.7 (グラム・シュミットの正規直交化法)

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{E}^n$.

行列 $Q = (\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n)$ は正則を仮定する. $(|Q| \neq 0)$

$\mathbb{p}_1 := \dfrac{\mathbb{v}_1}{||\mathbb{v}_1||}$.

$i = 2, \ldots, n$ に対して，順番に

$$\mathbb{p}_i := \frac{\mathbb{v}_i - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1 - \cdots - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_{i-1} \rangle \mathbb{p}_{i-1}}{||\mathbb{v}_i - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1 - \cdots - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_{i-1} \rangle \mathbb{p}_{i-1}||}$$

とすれば，$P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は直交行列.

注意

前回の例より，

$P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は直交行列

定理 4.7 (グラム・シュミットの正規直交化法)

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{E}^n$.

行列 $Q = (\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n)$ は正則を仮定する. $(|Q| \neq 0)$

$$\mathbb{p}_1 := \frac{\mathbb{v}_1}{||\mathbb{v}_1||}.$$

$i = 2, \ldots, n$ に対して，順番に

$$\mathbb{p}_i := \frac{\mathbb{v}_i - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1 - \cdots - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_{i-1} \rangle \mathbb{p}_{i-1}}{||\mathbb{v}_i - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1 - \cdots - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_{i-1} \rangle \mathbb{p}_{i-1}||}$$

とすれば，$P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は直交行列.

注意

前回の例より，

$$P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n) \text{ は直交行列} \Leftrightarrow \langle \mathbb{p}_i, \mathbb{p}_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

定理 4.7 (グラム・シュミットの正規直交化法)

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{E}^n$.
行列 $Q = (\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n)$ は 正則を仮定する. $(|Q| \neq 0)$
$\mathbb{p}_1 := \dfrac{\mathbb{v}_1}{||\mathbb{v}_1||}$.

$i = 2, \ldots, n$ に対して，順番に

$$\mathbb{p}_i := \frac{\mathbb{v}_i - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1 - \cdots - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_{i-1} \rangle \mathbb{p}_{i-1}}{||\mathbb{v}_i - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1 - \cdots - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_{i-1} \rangle \mathbb{p}_{i-1}||}$$

とすれば，$P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は直交行列.

注意

前回の例より，

$P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は直交行列 $\Leftrightarrow \langle \mathbb{p}_i, \mathbb{p}_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$

$\Leftrightarrow ||\mathbb{p}_i|| = \sqrt{\langle \mathbb{p}_i, \mathbb{p}_i \rangle} = 1$ (正規という) かつ $\mathbb{p}_i$ と $\mathbb{p}_j$ $(i \neq j)$ は直交する.

命題

A：対称行列．$(A^{\mathrm{T}} = A)$

命題

A : 対称行列. $(A^{\mathrm{T}} = A)$

$A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1,\ A\,\mathbb{p}_2 = \lambda_2\,\mathbb{p}_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2) \Rightarrow \langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = 0.$

(異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する)

命題

A : 対称行列. ($A^{\mathrm{T}} = A$)

$A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1,\ A\,\mathbb{p}_2 = \lambda_2\,\mathbb{p}_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2) \Rightarrow \langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = 0.$

(異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する)

$\because$ $\langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2$ より, $\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = 0$ を示せばよい.

命題

A : 対称行列.（$A^{\mathrm{T}} = A$)

$A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1,\ A\,\mathbb{p}_2 = \lambda_2\,\mathbb{p}_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2) \Rightarrow \langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = 0.$

(異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する)

$\because\ \langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2$ より，$\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = 0$ を示せばよい.

$A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1$ を転置して，$\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,A^{\mathrm{T}} = \lambda_1\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}$ より,

命題

A：対称行列．$(A^{\mathrm{T}} = A)$
$A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1,\ A\,\mathbb{p}_2 = \lambda_2\,\mathbb{p}_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2) \Rightarrow \langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = 0.$
(異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する)

$\because\ \langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2$ より，$\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = 0$ を示せばよい．
$A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1$ を転置して，$\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,A^{\mathrm{T}} = \lambda_1\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}$ より，
$\lambda_1\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = (\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})\mathbb{p}_2 = (\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}A)\mathbb{p}_2 = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}(A\,\mathbb{p}_2) = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2\,\mathbb{p}_2) = \lambda_2\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2$

命題

A : 対称行列. $(A^{\mathrm{T}} = A)$
$A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1,\ A\,\mathbb{p}_2 = \lambda_2\,\mathbb{p}_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2) \Rightarrow \langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = 0.$
(異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する)

$\because\ \langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2$ より，$\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = 0$ を示せばよい.
$A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1$ を転置して，$\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,A^{\mathrm{T}} = \lambda_1\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}$ より，
$\lambda_1\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = (\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}})\mathbb{p}_2 = (\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}} A)\mathbb{p}_2 = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}(A\,\mathbb{p}_2) = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2\,\mathbb{p}_2) = \lambda_2\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2$
$\Rightarrow\ (\lambda_1 - \lambda_2)\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = \mathbb{o}$

命題

A：対称行列．$(A^{\mathrm{T}} = A)$
$A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1,\ A\,\mathbb{p}_2 = \lambda_2\,\mathbb{p}_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2) \Rightarrow \langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = 0.$
(異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する)

$\because\ \langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2$ より，$\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = 0$ を示せばよい．

$A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1$ を転置して，$\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,A^{\mathrm{T}} = \lambda_1\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}$ より，

$$\lambda_1\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = (\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})\mathbb{p}_2 = (\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}A)\mathbb{p}_2 = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}(A\,\mathbb{p}_2) = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2\,\mathbb{p}_2) = \lambda_2\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2$$

$$\Rightarrow\ (\lambda_1 - \lambda_2)\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = \mathbb{o}$$

$$\Rightarrow\ \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = \mathbb{o}\ (\because\ \lambda_1 \neq \lambda_2).$$

命題

A : 対称行列. $(A^{\mathrm{T}} = A)$

$A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1,\ A\,\mathbb{p}_2 = \lambda_2\,\mathbb{p}_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2) \Rightarrow \langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = 0.$

(異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する)

$\because\ \langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2$ より，$\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = 0$ を示せばよい.

$A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1$ を転置して，$\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,A^{\mathrm{T}} = \lambda_1\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}$ より,

$$\lambda_1\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = (\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}})\mathbb{p}_2 = (\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}} A)\mathbb{p}_2 = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}(A\,\mathbb{p}_2) = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2\,\mathbb{p}_2) = \lambda_2\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2$$

$$\Rightarrow\ (\lambda_1 - \lambda_2)\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = \mathbb{o}$$

$$\Rightarrow\ \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = \mathbb{o}\ (\because\ \lambda_1 \neq \lambda_2).$$

注意

各固有値に対して,

グラム・シュミットの正規直交化法を適用すればよい.

命題

A：対称行列．$(A^{\mathrm{T}} = A)$
$A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1,\ A\,\mathbb{p}_2 = \lambda_2\,\mathbb{p}_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2) \Rightarrow \langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = 0.$
(異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する)

$\because\ \langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2$ より，$\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = 0$ を示せばよい．

$A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1$ を転置して，$\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,A^{\mathrm{T}} = \lambda_1\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}$ より，

$$\lambda_1\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = (\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})\mathbb{p}_2 = (\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}A)\mathbb{p}_2 = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}(A\,\mathbb{p}_2) = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2\,\mathbb{p}_2) = \lambda_2\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2$$

$$\Rightarrow\ (\lambda_1 - \lambda_2)\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = \mathbb{0}$$

$$\Rightarrow\ \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = \mathbb{0}\ (\because \lambda_1 \neq \lambda_2).$$

注意

各固有値に対して，
グラム・シュミットの正規直交化法を適用すればよい．

- 固有多項式 $f_A(t)$ が重根をもつときが問題となる

例

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を直交対角化せよ.

例

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を直交対角化せよ.

Step 1. A の固有多項式

$$f_A(t) = |t\,E - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -1 \\ -1 & t-3 & -1 \\ -1 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-5)(t-2)^2$$ より,

例

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を直交対角化せよ.

Step 1. A の固有多項式

$$f_A(t) = |t\,E - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -1 \\ -1 & t-3 & -1 \\ -1 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-5)(t-2)^2 \text{ より,}$$

A の固有値は $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 2$ (2 重解).

例

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を直交対角化せよ.

Step 1. A の固有多項式

$$f_A(t) = |t\,E - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -1 \\ -1 & t-3 & -1 \\ -1 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-5)(t-2)^2 \text{ より,}$$

A の固有値は $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$ (2 重解).

Step 2. $\boxed{\lambda_1 = 5}$ に対する固有ベクトル $\mathbb{v}$ は, $(5E - A)\,\mathbb{x} = \mathbb{o}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbb{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の解,} \quad \mathbb{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

例

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を直交対角化せよ.

Step 1. A の固有多項式

$$f_A(t) = |t\,E - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -1 \\ -1 & t-3 & -1 \\ -1 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-5)(t-2)^2 \text{ より},$$

A の固有値は $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$ (2 重解).

Step 2. $\boxed{\lambda_1 = 5}$ に対する固有ベクトル $\mathbb{v}$ は, $(5E - A)\,\mathbb{x} = \mathbb{o}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbb{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の解}, \quad \mathbb{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\boxed{\lambda_2 = 2}$ (2 重解) に対する固有ベクトル $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$ は, $(2E - A)\,\mathbb{x} = \mathbb{o}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbb{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の解}, \quad \mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbb{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

例 (つづき)

Step 3. (各固有値に，グラム・シュミットの正規直交化法を適用)

例 (つづき)

Step 3. (各固有値に，グラム・シュミットの正規直交化法を適用)

$\mathbb{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して，$\color{red}{\mathbb{q}} := \dfrac{\mathbb{v}}{||\mathbb{v}||} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

例 (つづき)

Step 3. (各固有値に，グラム・シュミットの正規直交化法を適用)

$\mathbb{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して，$\mathbb{q} := \dfrac{\mathbb{v}}{||\mathbb{v}||} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に対して，

例 (つづき)

Step 3. (各固有値に，グラム・シュミットの正規直交化法を適用)

$\mathbb{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して，$\mathbb{q} := \dfrac{\mathbb{v}}{||\mathbb{v}||} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に対して，

$$\mathbb{p}_1 := \frac{\mathbb{v}_1}{||\mathbb{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

例 (つづき)

Step 3. (各固有値に，グラム・シュミットの正規直交化法を適用)

$$\mathbb{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{に対して，} \color{red}{\mathbb{q}} := \frac{\mathbb{v}}{||\mathbb{v}||} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbb{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{に対して，}$$

$$\color{red}{\mathbb{p}_1} := \frac{\mathbb{v}_1}{||\mathbb{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\color{red}{\mathbb{p}_2} := \frac{\mathbb{v}_2 - \langle \mathbb{v}_2, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1}{||\mathbb{v}_2 - \langle \mathbb{v}_2, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1||} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

例 (つづき)

Step 4. $P = (\mathbb{q}\ \mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とすれば,

例 (つづき)

Step 4. $P = (\mathbb{q}\ \ \mathbb{p}_1\ \ \mathbb{p}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とすれば,

P は直交行列であり，$P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ となる．(グラム・シュミットより)

例 (つづき)

Step 4. $P = (\mathbb{q}\ \mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とすれば,

P は直交行列であり，$P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ となる．(グラム・シュミットより)

このとき，$P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

例 (つづき)

Step 4. $P = (\mathbb{q}\ \mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とすれば,

P は直交行列であり, $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ となる. (グラム・シュミットより)

このとき, $P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

A を直交対角化できた.

例 (つづき)

Step 4. $P = (\mathbb{q}\ \ \mathbb{p}_1\ \ \mathbb{p}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とすれば,

P は直交行列であり，$P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ となる．(グラム・シュミットより)

このとき，$P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

A を直交対角化できた．実際,

例 (つづき)

Step 4. $P = (\mathbb{q}\ \ \mathbb{p}_1\ \ \mathbb{p}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とすれば,

P は直交行列であり，$P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ となる．(グラム・シュミットより)

このとき，$P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

A を直交対角化できた． 実際,

$AP = (A\mathbb{q}\ \ A\mathbb{p}_1\ \ A\mathbb{p}_2) = (\lambda_1\mathbb{q}\ \ \lambda_2\mathbb{p}_1\ \ \lambda_2\mathbb{p}_2) = (5\mathbb{q}\ \ 2\mathbb{p}_1\ \ 2\mathbb{p}_2)$

$= (\mathbb{q}\ \ \mathbb{p}_1\ \ \mathbb{p}_2)\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.