

在籍番号		氏名	
------	--	----	--

[1] (定義)  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  が  $\mathbb{R}^n$  の  であるとは、すべての  $a \in \mathbb{R}^n$  が

$a = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$  ( $b_i \in \mathbb{R}$ ) と一意的に表せること。このとき、 $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  を  $v_1, \dots, v_n$  に関する  $a$  の座標という。

[2] (定義) 写像  $y = f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$  の各  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  が

$x_1, \dots, x_n$  の同次 1 次式するとき、 $y = f(x)$  を  という。

特に、 $m = n$  のとき、線形変換という。

[3] 行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  とする。  $A$  の固有多項式は  (1) である。

$A$  の固有値は、 $\lambda_1 = \input{width=2em}{}$  (2) と  $\lambda_2 = \input{width=2em}{}$  (3) (2 重解) の 2 つである。

$A$  の  $\lambda_1$  に対する固有ベクトルとして、 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \input{width=2em}{}$  (4) がとれ、

$\lambda_2$  に対する固有ベクトルとして、 $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  がとれる。

但し、 $3 \times 3$  行列  $P = (p_1 \ p_2 \ p_3)$  が正則行列になるようにとる。

行列  $P$  の逆行列は  $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & \input{width=2em}{}$  (5),  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \input{width=2em}{}$  (6) となる。

さらに、 $A$  を直交対角化するには、グラム・シュミットの正規直交化法を用いて、行列

$P = (p_1 \ p_2 \ p_3)$  から直交行列  $Q = (q_1 \ q_2 \ q_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \input{width=2em}{}$  (7) を作ればよい。

応用として、 $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2 \cdot 2^n & 5^n - 2 \cdot 2^n + 2^n & 5^n + 2^n - 2 \cdot 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2 \cdot 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & \input{width=2em}{}$  (8) がえられる。