はじめに　(線形代数 IIA)

線形代数 II　＝　線形代数 I のつづき

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 ⟶ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

4.10　座標；基底変換

4.10　座標；基底変換

定理 24

V：線形空間，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$：$V$ の基底．
$\forall \mathbb{v} \in V$ は $\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n$ の形に一意的にあらわされる．

4.10 座標；基底変換

定理 24

V：線形空間，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$：$V$ の基底.
$\forall \mathbb{v} \in V$ は $\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n$ の形に一意的にあらわされる.

(証明) $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は V の基底より，$V = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \ni \mathbb{v}$.

定理 24

V : 線形空間，$\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$: V の基底.
$\forall \mathbb{v} \in V$ は $\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n$ の形に一意的にあらわされる.

(証明) $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ は V の基底より，$V = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n\} \ni \mathbb{v}$.
一意性は,

4.10　座標；基底変換

定理 24

V：線形空間，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$：$V$ の基底．
$\forall \mathbb{v} \in V$ は $\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n$ の形に一意的にあらわされる．

(証明) $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は V の基底より，$V = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \ni \mathbb{v}$.
一意性は，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ が 1 次独立より，

4.10 座標；基底変換

定理 24

V：線形空間，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$：$V$ の基底．
$\forall \mathbb{v} \in V$ は $\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n$ の形に一意的にあらわされる．

(証明) $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は V の基底より，$V = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \ni \mathbb{v}$．
一意性は，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ が 1 次独立より，
$\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n = c_1'\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n'\mathbb{v}_n$

4.10 座標；基底変換

定理 24

V：線形空間，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$：$V$ の基底．
$\forall \mathbb{v} \in V$ は $\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n$ の形に一意的にあらわされる．

(証明) $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は V の基底より，$V = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \ni \mathbb{v}$.
一意性は，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ が 1 次独立より，
$\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n = c_1'\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n'\mathbb{v}_n$
$\Rightarrow (c_1 - c_1')\mathbb{v}_1 + \cdots + (c_n - c_n')\mathbb{v}_n = \mathbb{0}$

定理 24

V：線形空間，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$：$V$ の基底．
$\forall \mathbb{v} \in V$ は $\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n$ の形に一意的にあらわされる．

(証明) $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は V の基底より，$V = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \ni \mathbb{v}$.
一意性は，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ が 1 次独立より，
$\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n = c'_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c'_n\mathbb{v}_n$
$\Rightarrow (c_1 - c'_1)\mathbb{v}_1 + \cdots + (c_n - c'_n)\mathbb{v}_n = \mathbb{0} \Rightarrow c_1 = c'_1, \ldots, c_n = c'_n$. $\square$

定理 24

V：線形空間，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$：$V$ の基底．
$\forall \mathbb{v} \in V$ は $\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n$ の形に一意的にあらわされる．

(証明) $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は V の基底より，$V = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \ni \mathbb{v}$．
一意性は，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ が 1 次独立より，
$\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n = c_1'\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n'\mathbb{v}_n$
$\Rightarrow (c_1 - c_1')\mathbb{v}_1 + \cdots + (c_n - c_n')\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow c_1 = c_1', \ldots, c_n = c_n'$． □

定義 (座標ベクトル，座標行列)

定理 24 の $c_1, \ldots, c_n$ を <u>基底 $S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$ に関する $\mathbb{v}$ の座標</u>；

4.10 座標；基底変換

定理 24

V：線形空間，$\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$：$V$ の基底．
$\forall \mathbb{v} \in V$ は $\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n$ の形に一意的にあらわされる．

(証明) $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ は V の基底より，$V = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n\} \ni \mathbb{v}$．
一意性は，$\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ が 1 次独立より，
$\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n = c_1'\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n'\mathbb{v}_n$
$\Rightarrow (c_1 - c_1')\mathbb{v}_1 + \cdots + (c_n - c_n')\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow c_1 = c_1', \dots, c_n = c_n'$． □

定義 (座標ベクトル，座標行列)

定理 24 の $c_1, \dots, c_n$ を 基底 $S = \{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n\}$ に関する $\mathbb{v}$ の座標；

$(\mathbb{v})_S := (c_1, \dots, c_n)$ を 基底 S に関する $\mathbb{v}$ の座標ベクトル；

4.10 座標；基底変換

定理 24

V：線形空間，$\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$：$V$ の基底．
$\forall \mathbb{v} \in V$ は $\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n$ の形に一意的にあらわされる．

(証明) $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ は V の基底より，$V = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n\} \ni \mathbb{v}$.
一意性は，$\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ が 1 次独立より，
$\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n = c_1'\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n'\mathbb{v}_n$
$\Rightarrow (c_1 - c_1')\mathbb{v}_1 + \cdots + (c_n - c_n')\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow c_1 = c_1', \dots, c_n = c_n'$. □

定義 (座標ベクトル，座標行列)

定理 24 の $c_1, \dots, c_n$ を 基底 $S = \{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n\}$ に関する $\mathbb{v}$ の座標；

$(\mathbb{v})_S := (c_1, \dots, c_n)$ を 基底 S に関する $\mathbb{v}$ の座標ベクトル；

$[\mathbb{v}]_S := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ を 基底 S に関する $\mathbb{v}$ の座標行列 という．

例

$\mathbb{v}_1 = (1,2,1), \mathbb{v}_2 = (2,9,0), \mathbb{v}_3 = (3,3,4) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底.

例

$\mathbb{v}_1 = (1,2,1), \mathbb{v}_2 = (2,9,0), \mathbb{v}_3 = (3,3,4) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底.

$(\because \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0)$

例

$\mathbb{v}_1 = (1,2,1), \mathbb{v}_2 = (2,9,0), \mathbb{v}_3 = (3,3,4) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底.

$(\because \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0)$

$\mathbb{v} = (5,-1,9)$ の $S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ に関する座標ベクトル,

例

$\mathbb{v}_1 = (1,2,1), \mathbb{v}_2 = (2,9,0), \mathbb{v}_3 = (3,3,4) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底.
$(\because \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0)$
$\mathbb{v} = (5,-1,9)$ の $S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ に関する座標ベクトル，座標行列は

例

$\mathbb{v}_1 = (1,2,1), \mathbb{v}_2 = (2,9,0), \mathbb{v}_3 = (3,3,4) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底.
$(\because \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0)$
$\mathbb{v} = (5,-1,9)$ の $S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ に関する座標ベクトル，座標行列は

$(\mathbb{v})_S = (1,-1,2)$,

例

$\mathbb{v}_1 = (1,2,1), \mathbb{v}_2 = (2,9,0), \mathbb{v}_3 = (3,3,4) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底.
$(\because \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0)$
$\mathbb{v} = (5,-1,9)$ の $S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ に関する座標ベクトル，座標行列は
$(\mathbb{v})_S = (1,-1,2)$, $[\mathbb{v}]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

例

$\mathbb{v}_1 = (1,2,1), \mathbb{v}_2 = (2,9,0), \mathbb{v}_3 = (3,3,4) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底.

$(\because \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0)$

$\mathbb{v} = (5,-1,9)$ の $S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ に関する座標ベクトル，座標行列は

$(\mathbb{v})_S = (1,-1,2)$, $[\mathbb{v}]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $(\because\ \mathbb{v} = \mathbb{v}_1 - \mathbb{v}_2 + 2\mathbb{v}_3)$

例

$\mathbb{v}_1 = (1,2,1), \mathbb{v}_2 = (2,9,0), \mathbb{v}_3 = (3,3,4) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底.

$(\because \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0)$

$\mathbb{v} = (5,-1,9)$ の $S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ に関する座標ベクトル，座標行列は

$(\mathbb{v})_S = (1,-1,2)$, $[\mathbb{v}]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $(\because \ \mathbb{v} = \mathbb{v}_1 - \mathbb{v}_2 + 2\mathbb{v}_3)$

定理 25

V：内積空間，$\dim V = n$, $S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$: V の正規直交基底,

例

$\mathbb{v}_1 = (1,2,1), \mathbb{v}_2 = (2,9,0), \mathbb{v}_3 = (3,3,4) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底.
$(\because \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0)$
$\mathbb{v} = (5,-1,9)$ の $S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ に関する座標ベクトル，座標行列は
$(\mathbb{v})_S = (1,-1,2)$, $[\mathbb{v}]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $(\because\ \mathbb{v} = \mathbb{v}_1 - \mathbb{v}_2 + 2\mathbb{v}_3)$

定理 25

V : 内積空間，$\dim V = n$, $S = \{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n\}$: V の正規直交基底，
$(\mathbb{u})_S = (u_1, \dots, u_n)$, $(\mathbb{u}')_S = (u'_1, \dots, u'_n)$.

例

$\mathbb{v}_1 = (1,2,1), \mathbb{v}_2 = (2,9,0), \mathbb{v}_3 = (3,3,4) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底.

$(\because \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0)$

$\mathbb{v} = (5,-1,9)$ の $S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ に関する座標ベクトル，座標行列は

$(\mathbb{v})_S = (1,-1,2)$, $[\mathbb{v}]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $(\because\ \mathbb{v} = \mathbb{v}_1 - \mathbb{v}_2 + 2\mathbb{v}_3)$

定理 25

V：内積空間，$\dim V = n$, $S = \{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n\}$: V の正規直交基底,

$(\mathbb{u})_S = (u_1, \dots, u_n)$, $(\mathbb{u}')_S = (u'_1, \dots, u'_n)$.

(a) $||\mathbb{u}|| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$;

(b) $d(\mathbb{u}, \mathbb{u}') = \sqrt{(u_1 - u'_1)^2 + \cdots + (u_n - u'_n)^2}$;

(c) $\langle \mathbb{u}, \mathbb{u}' \rangle = u_1 u'_1 + \cdots + u_n u'_n$.

例

$\mathbb{v}_1 = (1,2,1), \mathbb{v}_2 = (2,9,0), \mathbb{v}_3 = (3,3,4) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底.
$(\because \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0)$
$\mathbb{v} = (5,-1,9)$ の $S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ に関する座標ベクトル, 座標行列は

$(\mathbb{v})_S = (1,-1,2)$, $[\mathbb{v}]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $(\because\ \mathbb{v} = \mathbb{v}_1 - \mathbb{v}_2 + 2\mathbb{v}_3)$

定理 25

V : 内積空間, $\dim V = n$, $S = \{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n\}$: V の正規直交基底,
$(\mathbb{u})_S = (u_1, \dots, u_n)$, $(\mathbb{u}')_S = (u'_1, \dots, u'_n)$.
(a) $||\mathbb{u}|| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$;
(b) $d(\mathbb{u}, \mathbb{u}') = \sqrt{(u_1 - u'_1)^2 + \cdots + (u_n - u'_n)^2}$;
(c) $\langle \mathbb{u}, \mathbb{u}' \rangle = u_1 u'_1 + \cdots + u_n u'_n$.

(証明) 略.

基底変換問題

V：線形空間，B, B'：V の基底，$\mathbb{v} \in V$.
座標行列 $[\mathbb{v}]_B$ と $[\mathbb{v}]_{B'}$ の関係は？

基底変換問題

V：線形空間，B, B' : V の基底，$\mathbb{v} \in V$.
座標行列 $[\mathbb{v}]_B$ と $[\mathbb{v}]_{B'}$ の関係は？

- $\dim V = 2$ の場合を考える．

基底変換問題

V：線形空間，B, B' : V の基底，$\mathbb{v} \in V$.
座標行列 $[\mathbb{v}]_B$ と $[\mathbb{v}]_{B'}$ の関係は？

- $\dim V = 2$ の場合を考える．

$B = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $B' = \{\mathbb{u}'_1, \mathbb{u}'_2\}$ とし，

基底変換問題

V：線形空間，B, B'：V の基底，$\mathbb{v} \in V$.
座標行列 $[\mathbb{v}]_B$ と $[\mathbb{v}]_{B'}$ の関係は？

- $\dim V = 2$ の場合を考える.

$B = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $B' = \{\mathbb{u}'_1, \mathbb{u}'_2\}$ とし，$[\mathbb{u}_1]_{B'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $[\mathbb{u}_2]_{B'} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

基底変換問題

V：線形空間，B, B'：V の基底，$\mathbb{v} \in V$.
座標行列 $[\mathbb{v}]_B$ と $[\mathbb{v}]_{B'}$ の関係は？

- $\dim V = 2$ の場合を考える.

$B = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $B' = \{\mathbb{u}'_1, \mathbb{u}'_2\}$ とし，$[\mathbb{u}_1]_{B'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $[\mathbb{u}_2]_{B'} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

つまり，$\begin{cases} \mathbb{u}_1 = a\,\mathbb{u}'_1 + b\,\mathbb{u}'_2 \\ \mathbb{u}_2 = c\,\mathbb{u}'_1 + d\,\mathbb{u}'_2 \end{cases}$ とする.

基底変換問題

V：線形空間，B, B'：V の基底，$\mathbb{v} \in V$.
座標行列 $[\mathbb{v}]_B$ と $[\mathbb{v}]_{B'}$ の関係は？

- $\dim V = 2$ の場合を考える．

$B = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $B' = \{\mathbb{u}'_1, \mathbb{u}'_2\}$ とし，$[\mathbb{u}_1]_{B'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $[\mathbb{u}_2]_{B'} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

つまり，$\begin{cases} \mathbb{u}_1 = a\,\mathbb{u}'_1 + b\,\mathbb{u}'_2 \\ \mathbb{u}_2 = c\,\mathbb{u}'_1 + d\,\mathbb{u}'_2 \end{cases}$ とする．$\forall \mathbb{v} \in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$.

基底変換問題

V：線形空間，B, B'：V の基底，$\mathbb{v} \in V$.
座標行列 $[\mathbb{v}]_B$ と $[\mathbb{v}]_{B'}$ の関係は？

- $\dim V = 2$ の場合を考える.

$B = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $B' = \{\mathbb{u}'_1, \mathbb{u}'_2\}$ とし，$[\mathbb{u}_1]_{B'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $[\mathbb{u}_2]_{B'} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

つまり，$\begin{cases} \mathbb{u}_1 = a\,\mathbb{u}'_1 + b\,\mathbb{u}'_2 \\ \mathbb{u}_2 = c\,\mathbb{u}'_1 + d\,\mathbb{u}'_2 \end{cases}$ とする．$\forall \mathbb{v} \in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$.

つまり，$\mathbb{v} = k_1\mathbb{u}_1 + k_2\mathbb{u}_2$ とすると，

基底変換問題

V：線形空間，B, B'：V の基底，$\mathbb{v} \in V$.
座標行列 $[\mathbb{v}]_B$ と $[\mathbb{v}]_{B'}$ の関係は？

- $\dim V = 2$ の場合を考える．

$B = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $B' = \{\mathbb{u}'_1, \mathbb{u}'_2\}$ とし，$[\mathbb{u}_1]_{B'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $[\mathbb{u}_2]_{B'} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

つまり，$\begin{cases} \mathbb{u}_1 = a\,\mathbb{u}'_1 + b\,\mathbb{u}'_2 \\ \mathbb{u}_2 = c\,\mathbb{u}'_1 + d\,\mathbb{u}'_2 \end{cases}$ とする．$\forall \mathbb{v} \in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$.

つまり，$\mathbb{v} = k_1\mathbb{u}_1 + k_2\mathbb{u}_2$ とすると，$\mathbb{v} =$
$k_1(a\,\mathbb{u}'_1 + b\,\mathbb{u}'_2) + k_2(c\,\mathbb{u}'_1 + d\,\mathbb{u}'_2) = (k_1 a + k_2 c)\mathbb{u}'_1 + (k_1 b + k_2 d)\mathbb{u}'_2$ より，

基底変換問題

V：線形空間，B, B'：V の基底，$\mathbb{v} \in V$.
座標行列 $[\mathbb{v}]_B$ と $[\mathbb{v}]_{B'}$ の関係は？

- $\dim V = 2$ の場合を考える.

$B = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $B' = \{\mathbb{u}'_1, \mathbb{u}'_2\}$ とし，$[\mathbb{u}_1]_{B'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $[\mathbb{u}_2]_{B'} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

つまり，$\begin{cases} \mathbb{u}_1 = a\,\mathbb{u}'_1 + b\,\mathbb{u}'_2 \\ \mathbb{u}_2 = c\,\mathbb{u}'_1 + d\,\mathbb{u}'_2 \end{cases}$ とする．$\forall \mathbb{v} \in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$.

つまり，$\mathbb{v} = k_1\mathbb{u}_1 + k_2\mathbb{u}_2$ とすると，$\mathbb{v} =$
$k_1(a\,\mathbb{u}'_1 + b\,\mathbb{u}'_2) + k_2(c\,\mathbb{u}'_1 + d\,\mathbb{u}'_2) = (k_1a + k_2c)\mathbb{u}'_1 + (k_1b + k_2d)\mathbb{u}'_2$ より，

$$[\mathbb{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{pmatrix}$$

基底変換問題

V : 線形空間，B, B' : V の基底，$\mathbb{v} \in V$.
座標行列 $[\mathbb{v}]_B$ と $[\mathbb{v}]_{B'}$ の関係は？

- $\dim V = 2$ の場合を考える.

$B = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $B' = \{\mathbb{u}'_1, \mathbb{u}'_2\}$ とし，$[\mathbb{u}_1]_{B'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $[\mathbb{u}_2]_{B'} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

つまり，$\begin{cases} \mathbb{u}_1 = a\,\mathbb{u}'_1 + b\,\mathbb{u}'_2 \\ \mathbb{u}_2 = c\,\mathbb{u}'_1 + d\,\mathbb{u}'_2 \end{cases}$ とする．$\forall \mathbb{v} \in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$.

つまり，$\mathbb{v} = k_1\mathbb{u}_1 + k_2\mathbb{u}_2$ とすると，$\mathbb{v} =$
$k_1(a\,\mathbb{u}'_1 + b\,\mathbb{u}'_2) + k_2(c\,\mathbb{u}'_1 + d\,\mathbb{u}'_2) = (k_1a + k_2c)\mathbb{u}'_1 + (k_1b + k_2d)\mathbb{u}'_2$ より，

$$[\mathbb{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

基底変換問題

V：線形空間，B, B'：V の基底，$\mathbb{v} \in V$.
座標行列 $[\mathbb{v}]_B$ と $[\mathbb{v}]_{B'}$ の関係は？

- $\dim V = 2$ の場合を考える.

$B = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $B' = \{\mathbb{u}'_1, \mathbb{u}'_2\}$ とし，$[\mathbb{u}_1]_{B'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $[\mathbb{u}_2]_{B'} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

つまり，$\begin{cases} \mathbb{u}_1 = a\,\mathbb{u}'_1 + b\,\mathbb{u}'_2 \\ \mathbb{u}_2 = c\,\mathbb{u}'_1 + d\,\mathbb{u}'_2 \end{cases}$ とする．$\forall \mathbb{v} \in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$.

つまり，$\mathbb{v} = k_1\mathbb{u}_1 + k_2\mathbb{u}_2$ とすると，$\mathbb{v} =$
$k_1(a\,\mathbb{u}'_1 + b\,\mathbb{u}'_2) + k_2(c\,\mathbb{u}'_1 + d\,\mathbb{u}'_2) = (k_1a + k_2c)\mathbb{u}'_1 + (k_1b + k_2d)\mathbb{u}'_2$ より，

$$[\mathbb{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} [\mathbb{v}]_B.$$

基底変換問題

V：線形空間，B, B'：V の基底，$\mathbb{v} \in V$.
座標行列 $[\mathbb{v}]_B$ と $[\mathbb{v}]_{B'}$ の関係は？

- $\dim V = 2$ の場合を考える．

$B = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $B' = \{\mathbb{u}'_1, \mathbb{u}'_2\}$ とし，$[\mathbb{u}_1]_{B'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $[\mathbb{u}_2]_{B'} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

つまり，$\begin{cases} \mathbb{u}_1 = a\,\mathbb{u}'_1 + b\,\mathbb{u}'_2 \\ \mathbb{u}_2 = c\,\mathbb{u}'_1 + d\,\mathbb{u}'_2 \end{cases}$ とする．$\forall \mathbb{v} \in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$.

つまり，$\mathbb{v} = k_1\mathbb{u}_1 + k_2\mathbb{u}_2$ とすると，$\mathbb{v} =$
$k_1(a\,\mathbb{u}'_1 + b\,\mathbb{u}'_2) + k_2(c\,\mathbb{u}'_1 + d\,\mathbb{u}'_2) = (k_1a + k_2c)\mathbb{u}'_1 + (k_1b + k_2d)\mathbb{u}'_2$ より，

$$[\mathbb{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}[\mathbb{v}]_B.$$

$\therefore$ $[\mathbb{v}]_{B'} = P\,[\mathbb{v}]_B$. 但し，$P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \left([\mathbb{u}_1]_{B'}\ [\mathbb{u}_2]_{B'}\right)$.

基底変換問題

V：線形空間，B, B'：V の基底，$\mathbb{v} \in V$.
座標行列 $[\mathbb{v}]_B$ と $[\mathbb{v}]_{B'}$ の関係は？

- $\dim V = 2$ の場合を考える.

$B = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $B' = \{\mathbb{u}'_1, \mathbb{u}'_2\}$ とし，$[\mathbb{u}_1]_{B'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $[\mathbb{u}_2]_{B'} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

つまり，$\begin{cases} \mathbb{u}_1 = a\,\mathbb{u}'_1 + b\,\mathbb{u}'_2 \\ \mathbb{u}_2 = c\,\mathbb{u}'_1 + d\,\mathbb{u}'_2 \end{cases}$ とする．$\forall \mathbb{v} \in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$.

つまり，$\mathbb{v} = k_1\mathbb{u}_1 + k_2\mathbb{u}_2$ とすると，$\mathbb{v} =$
$k_1(a\,\mathbb{u}'_1 + b\,\mathbb{u}'_2) + k_2(c\,\mathbb{u}'_1 + d\,\mathbb{u}'_2) = (k_1a + k_2c)\mathbb{u}'_1 + (k_1b + k_2d)\mathbb{u}'_2$ より，

$$[\mathbb{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}[\mathbb{v}]_B.$$

$\therefore$ $[\mathbb{v}]_{B'} = P\,[\mathbb{v}]_B$. 但し，$P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbb{u}_1]_{B'} & [\mathbb{u}_2]_{B'} \end{pmatrix}$.

- $\dim V = n$ の場合も，同様に以下が成り立つ：

定理 (基底変換問題の解)

線形空間 V の基底 $B = \{\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n\}$ から $B' = \{\mathbb{u}'_1, \ldots, \mathbb{u}'_n\}$ に変換するとき，$\mathbb{v} \in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_{B'} = P\,[\mathbb{v}]_B$.
但し，$P = \left([\mathbb{u}_1]_{B'} \cdots [\mathbb{u}_n]_{B'}\right)$. ($\underline{P \text{ を } B \text{ から } B' \text{ への変換行列}}$ という)

定理 (基底変換問題の解)

線形空間 V の基底 $B = \{\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n\}$ から $B' = \{\mathbb{u}'_1, \ldots, \mathbb{u}'_n\}$ に変換するとき，$\mathbb{v} \in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_{B'} = P\,[\mathbb{v}]_B$.
但し，$P = \left([\mathbb{u}_1]_{B'} \ \cdots \ [\mathbb{u}_n]_{B'}\right)$. ($P$ を B から B' への変換行列 という)

例

$V = \mathbb{R}^2$, 基底 $B = \left\{\mathbb{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$,
$B' = \left\{\mathbb{u}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{u}'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

定理 (基底変換問題の解)

線形空間 V の基底 $B = \{\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n\}$ から $B' = \{\mathbb{u}'_1, \ldots, \mathbb{u}'_n\}$ に変換するとき，$\mathbb{v} \in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_{B'} = P\,[\mathbb{v}]_B$.
但し，$P = \left([\mathbb{u}_1]_{B'} \cdots [\mathbb{u}_n]_{B'}\right)$. ($P$ を B から B' への変換行列 という)

例

$V = \mathbb{R}^2$, 基底 $B = \left\{\mathbb{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$,
$B' = \left\{\mathbb{u}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{u}'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. $[\mathbb{v}]_B = \mathbb{v}$.

定理 (基底変換問題の解)

線形空間 V の基底 $B=\{\mathbb{u}_1,\dots,\mathbb{u}_n\}$ から $B'=\{\mathbb{u}'_1,\dots,\mathbb{u}'_n\}$ に変換するとき，$\mathbb{v}\in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_{B'}=P\,[\mathbb{v}]_B$.

但し，$P=\Big([\mathbb{u}_1]_{B'}\ \cdots\ [\mathbb{u}_n]_{B'}\Big)$. ($P$ を B から B' への変換行列 という)

例

$V=\mathbb{R}^2$, 基底 $B=\left\{\mathbb{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathbb{u}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$,

$B'=\left\{\mathbb{u}'_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\mathbb{u}'_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$. $[\mathbb{v}]_B=\mathbb{v}$.

$\begin{cases}\mathbb{u}_1=-\mathbb{u}'_1+\mathbb{u}'_2\\ \mathbb{u}_2=2\mathbb{u}'_1-\mathbb{u}'_2\end{cases}$ より，

定理 (基底変換問題の解)

線形空間 V の基底 $B=\{\mathbb{u}_1,\ldots,\mathbb{u}_n\}$ から $B'=\{\mathbb{u}'_1,\ldots,\mathbb{u}'_n\}$ に変換するとき，$\mathbb{v}\in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_{B'}=P\,[\mathbb{v}]_B$.

但し，$P=\left([\mathbb{u}_1]_{B'}\ \cdots\ [\mathbb{u}_n]_{B'}\right)$. ($P$ を B から B' への変換行列 という)

例

$V=\mathbb{R}^2$, 基底 $B=\left\{\mathbb{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathbb{u}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$,

$B'=\left\{\mathbb{u}'_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\mathbb{u}'_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$. $[\mathbb{v}]_B=\mathbb{v}$.

$\begin{cases}\mathbb{u}_1=-\mathbb{u}'_1+\mathbb{u}'_2\\ \mathbb{u}_2=2\mathbb{u}'_1-\mathbb{u}'_2\end{cases}$ より，$[\mathbb{u}_1]_{B'}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $[\mathbb{u}_2]_{B'}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

定理 (基底変換問題の解)

線形空間 V の基底 $B = \{\mathbb{u}_1, \dots, \mathbb{u}_n\}$ から $B' = \{\mathbb{u}'_1, \dots, \mathbb{u}'_n\}$ に変換するとき，$\mathbb{v} \in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_{B'} = P\,[\mathbb{v}]_B$.

但し，$P = \left([\mathbb{u}_1]_{B'} \cdots [\mathbb{u}_n]_{B'} \right)$. ($P$ を B から B' への変換行列 という)

例

$V = \mathbb{R}^2$, 基底 $B = \left\{ \mathbb{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

$B' = \left\{ \mathbb{u}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{u}'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. $[\mathbb{v}]_B = \mathbb{v}$.

$\begin{cases} \mathbb{u}_1 = -\mathbb{u}'_1 + \mathbb{u}'_2 \\ \mathbb{u}_2 = 2\mathbb{u}'_1 - \mathbb{u}'_2 \end{cases}$ より，$[\mathbb{u}_1]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[\mathbb{u}_2]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\therefore\ P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

定理 (基底変換問題の解)

線形空間 V の基底 $B=\{\mathbb{u}_1,\dots,\mathbb{u}_n\}$ から $B'=\{\mathbb{u}'_1,\dots,\mathbb{u}'_n\}$ に変換するとき，$\mathbb{v}\in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_{B'}=P\,[\mathbb{v}]_B$.
但し，$P=\left([\mathbb{u}_1]_{B'}\ \cdots\ [\mathbb{u}_n]_{B'}\right)$. ($P$ を B から B' への変換行列 という)

例

$V=\mathbb{R}^2$, 基底 $B=\left\{\mathbb{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathbb{u}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$,

$B'=\left\{\mathbb{u}'_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\mathbb{u}'_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$. $[\mathbb{v}]_B=\mathbb{v}$.

$\begin{cases}\mathbb{u}_1=-\mathbb{u}'_1+\mathbb{u}'_2\\ \mathbb{u}_2=2\mathbb{u}'_1-\mathbb{u}'_2\end{cases}$ より，$[\mathbb{u}_1]_{B'}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $[\mathbb{u}_2]_{B'}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

$\therefore\ P=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}$. $\mathbb{v}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$ とすると，

定理 (基底変換問題の解)

線形空間 V の基底 $B=\{\mathbb{u}_1,\dots,\mathbb{u}_n\}$ から $B'=\{\mathbb{u}'_1,\dots,\mathbb{u}'_n\}$ に変換するとき，$\mathbb{v}\in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_{B'}=P\,[\mathbb{v}]_B$.

但し，$P=\left([\mathbb{u}_1]_{B'}\ \cdots\ [\mathbb{u}_n]_{B'}\right)$. ($P$ を B から B' への変換行列 という)

例

$V=\mathbb{R}^2$, 基底 $B=\left\{\mathbb{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathbb{u}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$,

$B'=\left\{\mathbb{u}'_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\mathbb{u}'_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$. $[\mathbb{v}]_B=\mathbb{v}$.

$\begin{cases}\mathbb{u}_1=-\mathbb{u}'_1+\mathbb{u}'_2\\ \mathbb{u}_2=2\mathbb{u}'_1-\mathbb{u}'_2\end{cases}$ より，$[\mathbb{u}_1]_{B'}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $[\mathbb{u}_2]_{B'}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

$\therefore\ P=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}$. $\mathbb{v}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$ とすると，$[\mathbb{v}]_{B'}=P\,[\mathbb{v}]_B$

定理 (基底変換問題の解)

線形空間 V の基底 $B=\{\mathbb{u}_1,\dots,\mathbb{u}_n\}$ から $B'=\{\mathbb{u}'_1,\dots,\mathbb{u}'_n\}$ に変換するとき，$\mathbb{v}\in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_{B'}=P\,[\mathbb{v}]_B$.

但し，$P=\left([\mathbb{u}_1]_{B'}\ \cdots\ [\mathbb{u}_n]_{B'}\right)$. ($P$ を B から B' への変換行列 という)

例

$V=\mathbb{R}^2$, 基底 $B=\left\{\mathbb{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathbb{u}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$,

$B'=\left\{\mathbb{u}'_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\mathbb{u}'_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$. $[\mathbb{v}]_B=\mathbb{v}$.

$\begin{cases}\mathbb{u}_1=-\mathbb{u}'_1+\mathbb{u}'_2\\ \mathbb{u}_2=2\mathbb{u}'_1-\mathbb{u}'_2\end{cases}$ より，$[\mathbb{u}_1]_{B'}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $[\mathbb{u}_2]_{B'}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

$\therefore\ P=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}$. $\mathbb{v}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$ とすると，$[\mathbb{v}]_{B'}=P\,[\mathbb{v}]_B=$

$$P\,\mathbb{v}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}.$$

定理 (基底変換問題の解)

線形空間 V の基底 $B=\{\mathbb{u}_1,\dots,\mathbb{u}_n\}$ から $B'=\{\mathbb{u}'_1,\dots,\mathbb{u}'_n\}$ に変換するとき，$\mathbb{v}\in V$ に対して，$[\mathbb{v}]_{B'}=P\,[\mathbb{v}]_B$.

但し，$P=\Big([\mathbb{u}_1]_{B'}\ \cdots\ [\mathbb{u}_n]_{B'}\Big)$. ($\underline{P \text{ を } B \text{ から } B' \text{ への変換行列}}$ という)

例

$V=\mathbb{R}^2$, 基底 $B=\left\{\mathbb{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathbb{u}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$,

$B'=\left\{\mathbb{u}'_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\mathbb{u}'_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$. $[\mathbb{v}]_B=\mathbb{v}$.

$\begin{cases}\mathbb{u}_1=-\mathbb{u}'_1+\mathbb{u}'_2\\ \mathbb{u}_2=2\mathbb{u}'_1-\mathbb{u}'_2\end{cases}$ より，$[\mathbb{u}_1]_{B'}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $[\mathbb{u}_2]_{B'}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

$\therefore\ P=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}$. $\mathbb{v}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$ とすると，$[\mathbb{v}]_{B'}=P\,[\mathbb{v}]_B=$

$P\mathbb{v}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$. 実際，$\mathbb{v}=-3\mathbb{u}'_1+5\mathbb{u}'_2$.

定理 26

基底 B から B' への変換行列を P とする.
(1) P は可逆 (正則);
(2) P^{-1} は B' から B への変換行列.

定理 26

基底 B から B' への変換行列を P とする.
(1) P は可逆 (正則);
(2) P^{-1} は B' から B への変換行列.

(証明) $[\mathbb{v}]_{B'} = P[\mathbb{v}]_B, [\mathbb{v}]_B = Q[\mathbb{v}]_{B'}$

定理 26

基底 B から B' への変換行列を P とする.
(1) P は可逆 (正則);
(2) P^{-1} は B' から B への変換行列.

(証明) $[\mathbb{v}]_{B'} = P[\mathbb{v}]_B, [\mathbb{v}]_B = Q[\mathbb{v}]_{B'} \Rightarrow [\mathbb{v}]_B = QP[\mathbb{v}]_B.$

定理 26

基底 B から B' への変換行列を P とする.
(1) P は可逆 (正則);
(2) P^{-1} は B' から B への変換行列.

(証明) $[\mathbb{v}]_{B'} = P[\mathbb{v}]_B, [\mathbb{v}]_B = Q[\mathbb{v}]_{B'} \Rightarrow [\mathbb{v}]_B = QP[\mathbb{v}]_B$. $\mathbb{v} \in V$ は任意より,

定理 26

基底 B から B' への変換行列を P とする.
(1) P は可逆 (正則);
(2) P^{-1} は B' から B への変換行列.

(証明) $[\mathbb{v}]_{B'} = P[\mathbb{v}]_B, [\mathbb{v}]_B = Q[\mathbb{v}]_{B'} \Rightarrow [\mathbb{v}]_B = QP[\mathbb{v}]_B$. $\mathbb{v} \in V$ は任意より, $[\mathbb{v}]_B = \mathbb{e}_i$ (標準単位ベクトル) とすれば, $QP = I$ で $Q = P^{-1}$. □

定理 26

基底 B から B' への変換行列を P とする.
(1) P は可逆 (正則);
(2) P^{-1} は B' から B への変換行列.

(証明) $[\mathbb{v}]_{B'} = P[\mathbb{v}]_B, [\mathbb{v}]_B = Q[\mathbb{v}]_{B'} \Rightarrow [\mathbb{v}]_B = QP[\mathbb{v}]_B$. $\mathbb{v} \in V$ は任意より, $[\mathbb{v}]_B = \mathbb{e}_i$ (標準単位ベクトル) とすれば, $QP = I$ で $Q = P^{-1}$. □

- $[\mathbb{v}]_{B'} = P[\mathbb{v}]_B \Rightarrow [\mathbb{v}]_B = P^{-1}[\mathbb{v}]_{B'}$

定理 26

基底 B から B' への変換行列を P とする.
(1) P は可逆 (正則);
(2) P^{-1} は B' から B への変換行列.

(証明) $[\mathbb{v}]_{B'} = P[\mathbb{v}]_B, [\mathbb{v}]_B = Q[\mathbb{v}]_{B'} \Rightarrow [\mathbb{v}]_B = QP[\mathbb{v}]_B$. $\mathbb{v} \in V$ は任意より, $[\mathbb{v}]_B = \mathbb{e}_i$ (標準単位ベクトル) とすれば, $QP = I$ で $Q = P^{-1}$. □

- $[\mathbb{v}]_{B'} = P[\mathbb{v}]_B \Rightarrow [\mathbb{v}]_B = P^{-1}[\mathbb{v}]_{B'}$

定義 (直交行列)

$A^{-1} = A^t$ なる正方行列 A を <u>直交行列</u> という.

定理 26

基底 B から B' への変換行列を P とする.
(1) P は可逆 (正則);
(2) P^{-1} は B' から B への変換行列.

(証明) $[\mathbb{v}]_{B'} = P[\mathbb{v}]_B, [\mathbb{v}]_B = Q[\mathbb{v}]_{B'} \Rightarrow [\mathbb{v}]_B = QP[\mathbb{v}]_B$. $\mathbb{v} \in V$ は任意より, $[\mathbb{v}]_B = \mathbb{e}_i$ (標準単位ベクトル) とすれば, $QP = I$ で $Q = P^{-1}$. □

- $[\mathbb{v}]_{B'} = P[\mathbb{v}]_B \Rightarrow [\mathbb{v}]_B = P^{-1}[\mathbb{v}]_{B'}$

定義 (直交行列)

$A^{-1} = A^t$ なる正方行列 A を <u>直交行列</u> という.

定理 27

V : 内積空間, $\dim V < \infty$. B, B' : V の正規直交基底.
$[\mathbb{v}]_{B'} = P\,[\mathbb{v}]_B \Rightarrow P$ は直交行列, i.e. $P^{-1} = P^t$.

(証明) 略.

定理 26

基底 B から B' への変換行列を P とする.
(1) P は可逆 (正則);
(2) P^{-1} は B' から B への変換行列.

(証明) $[\mathbb{v}]_{B'} = P[\mathbb{v}]_B, [\mathbb{v}]_B = Q[\mathbb{v}]_{B'} \Rightarrow [\mathbb{v}]_B = QP[\mathbb{v}]_B$. $\mathbb{v} \in V$ は任意より, $[\mathbb{v}]_B = \mathbb{e}_i$ (標準単位ベクトル) とすれば, $QP = I$ で $Q = P^{-1}$. $\square$

- $[\mathbb{v}]_{B'} = P[\mathbb{v}]_B \Rightarrow [\mathbb{v}]_B = P^{-1}[\mathbb{v}]_{B'}$

定義 (直交行列)

$A^{-1} = A^t$ なる正方行列 A を 直交行列 という.

定理 27

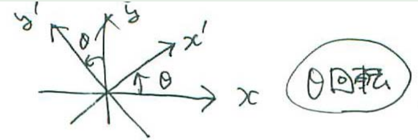
V : 内積空間, $\dim V < \infty$. B, B' : V の正規直交基底.
$[\mathbb{v}]_{B'} = P\,[\mathbb{v}]_B \Rightarrow P$ は直交行列, i.e. $P^{-1} = P^t$.

(証明) 略. (興味があれば, 各自考えたり, 調べたりしてみる)

例

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {\color{red}P} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

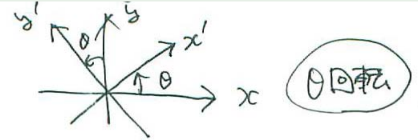
$${\color{red}P} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$



例

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {\color{red}P} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

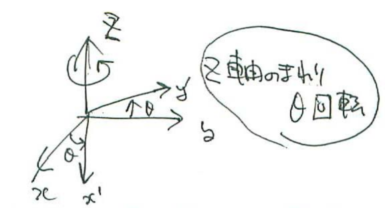
$${\color{red}P} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$



例

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = {\color{red}P} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$${\color{red}P} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



定理 28

$A: n \times n$ 行列．次は同値：

(a) A は直交行列　(i.e. $A^{-1} = A^t$);

(b) A の行ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；

(c) A の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；

(d) $||A\mathbb{x}|| = ||\mathbb{x}||$ $(\forall \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n)$;

(e) $\langle A\mathbb{x}, A\mathbb{y} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$ $(\forall \mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{R}^n)$.

定理 28

$A : n \times n$ 行列．次は同値：

(a) A は直交行列　(i.e. $A^{-1} = A^t$);

(b) A の行ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；

(c) A の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；

(d) $||A\mathbb{x}|| = ||\mathbb{x}||$ $(\forall \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n)$;

(e) $\langle A\mathbb{x}, A\mathbb{y} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$ $(\forall \mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{R}^n)$.

(証明) 略.

定理 28

$A : n \times n$ 行列．次は同値：

(a) A は直交行列　(i.e. $A^{-1} = A^t$);

(b) A の行ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；

(c) A の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；

(d) $||A\mathbb{x}|| = ||\mathbb{x}||$ $(\forall \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n)$;

(e) $\langle A\mathbb{x}, A\mathbb{y} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$ $(\forall \mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{R}^n)$.

(証明) 略．(興味があれば，各自考えたり，調べたりしてみる)

定理 28

A：$n \times n$ 行列．次は同値：

(a) A は直交行列　(i.e. $A^{-1} = A^t$);

(b) A の行ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；

(c) A の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；

(d) $||A\mathbb{x}|| = ||\mathbb{x}||$ $(\forall \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n)$;

(e) $\langle A\mathbb{x}, A\mathbb{y}\rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle$ $(\forall \mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{R}^n)$.

(証明) 略．(興味があれば，各自考えたり，調べたりしてみる)

($\langle \mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle = \mathbb{x} \bullet \mathbb{y} = \mathbb{x}^t\,\mathbb{y}$：ユークリッド内積に注意)

定理 28

A : $n \times n$ 行列．次は同値：

(a) A は直交行列　(i.e. $A^{-1} = A^t$);

(b) A の行ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；

(c) A の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；

(d) $||A\mathbb{x}|| = ||\mathbb{x}||$ $(\forall \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n)$;

(e) $\langle A\mathbb{x}, A\mathbb{y}\rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle$ $(\forall \mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{R}^n)$.

(証明) 略. (興味があれば，各自考えたり，調べたりしてみる)

$(\langle \mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle = \mathbb{x} \bullet \mathbb{y} = \mathbb{x}^t\, \mathbb{y}$: ユークリッド内積に注意)

(a) $\Leftrightarrow$ (c) $A = (\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n)$ (A の j 列を $\mathbb{a}_j$) とすると，

定理 28

$A : n \times n$ 行列．次は同値：

(a) A は直交行列　(i.e. $A^{-1} = A^t$);

(b) A の行ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；

(c) A の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；

(d) $||A\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}||$ $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$;

(e) $\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$.

(証明) 略．(興味があれば，各自考えたり，調べたりしてみる)

($\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{x}^t\,\mathbf{y}$：ユークリッド内積に注意)

(a) $\Leftrightarrow$ (c) $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$ (A の j 列を $\mathbf{a}_j$) とすると，$(A^t)A$ の (i, j) 成分は $\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j\rangle$ で，

定理 28

A：$n\times n$ 行列．次は同値：
(a) A は直交行列　(i.e. $A^{-1}=A^t$);
(b) A の行ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；
(c) A の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；
(d) $||A\mathbb{x}||=||\mathbb{x}||$ $(\forall\mathbb{x}\in\mathbb{R}^n)$;
(e) $\langle A\mathbb{x},A\mathbb{y}\rangle=\langle\mathbb{x},\mathbb{y}\rangle$ $(\forall\mathbb{x},\mathbb{y}\in\mathbb{R}^n)$.

(証明) 略．(興味があれば，各自考えたり，調べたりしてみる)
($\langle\mathbb{x},\mathbb{y}\rangle=\mathbb{x}\bullet\mathbb{y}=\mathbb{x}^t\,\mathbb{y}$：ユークリッド内積に注意)
(a) $\Leftrightarrow$ (c) $A=(\mathbb{a}_1\cdots\mathbb{a}_n)$ (A の j 列を $\mathbb{a}_j$) とすると，$(A^t)A$ の (i,j) 成分は $\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}=\langle\mathbb{a}_i,\mathbb{a}_j\rangle$ で，$\mathbb{a}_j$ 達が正規直交基底 $\Leftrightarrow$ $(A^t)A=I_n$.

定理 28

A : $n \times n$ 行列．次は同値：

(a) A は直交行列　(i.e. $A^{-1} = A^t$);

(b) A の行ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；

(c) A の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；

(d) $||A\mathbb{x}|| = ||\mathbb{x}||$ $(\forall \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n)$;

(e) $\langle A\mathbb{x}, A\mathbb{y}\rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle$ $(\forall \mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{R}^n)$.

(証明) 略．(興味があれば，各自考えたり，調べたりしてみる)
($\langle \mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle = \mathbb{x} \bullet \mathbb{y} = \mathbb{x}^t\,\mathbb{y}$: ユークリッド内積に注意)
(a) $\Leftrightarrow$ (c) $A = (\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n)$ (A の j 列を $\mathbb{a}_j$) とすると，$(A^t)A$ の (i,j) 成分は $\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \langle \mathbb{a}_i, \mathbb{a}_j\rangle$ で，$\mathbb{a}_j$ 達が正規直交基底 $\Leftrightarrow$ $(A^t)A = I_n$.
(a) $\Leftrightarrow$ (b) 同様に，行について $A(A^t)$ を考えればよい．

定理 28

$A : n \times n$ 行列．次は同値：
(a) A は直交行列　(i.e. $A^{-1} = A^t$);
(b) A の行ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；
(c) A の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；
(d) $||A\mathbb{x}|| = ||\mathbb{x}||$ $(\forall \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n)$;
(e) $\langle A\mathbb{x}, A\mathbb{y}\rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle$ $(\forall \mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{R}^n)$.

(証明) 略．(興味があれば，各自考えたり，調べたりしてみる)
($\langle \mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle = \mathbb{x} \bullet \mathbb{y} = {}^t\mathbb{x}\,\mathbb{y}$：ユークリッド内積に注意)
(a) $\Leftrightarrow$ (c) $A = (\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n)$ (A の j 列を $\mathbb{a}_j$) とすると，$(A^t)A$ の (i, j) 成分は $\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \langle \mathbb{a}_i, \mathbb{a}_j\rangle$ で，$\mathbb{a}_j$ 達が正規直交基底 $\Leftrightarrow$ $(A^t)A = I_n$.
(a) $\Leftrightarrow$ (b) 同様に，行について $A(A^t)$ を考えればよい．(a) $\Leftrightarrow$ (e)
$\langle \mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle = {}^t\mathbb{x}\,\mathbb{y}$ より，

定理 28

A：$n \times n$ 行列．次は同値：
(a) A は直交行列　(i.e. $A^{-1} = A^t$);
(b) A の行ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；
(c) A の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；
(d) $||A\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}||$ $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$;
(e) $\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$.

(証明) 略．(興味があれば，各自考えたり，調べたりしてみる)
($\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{x}^t\, \mathbf{y}$：ユークリッド内積に注意)
(a) $\Leftrightarrow$ (c) $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$ (A の j 列を $\mathbf{a}_j$) とすると，$(A^t)A$ の (i,j) 成分は $\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle$ で，$\mathbf{a}_j$ 達が正規直交基底 $\Leftrightarrow (A^t)A = I_n$.
(a) $\Leftrightarrow$ (b) 同様に，行について $A(A^t)$ を考えればよい．(a) $\Leftrightarrow$ (e) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^t\, \mathbf{y}$ より，$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^t\mathbf{y} \rangle$ から従う．

定理 28

$A : n \times n$ 行列．次は同値：
(a) A は直交行列　(i.e. $A^{-1} = A^t$);
(b) A の行ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；
(c) A の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；
(d) $||A\mathbb{x}|| = ||\mathbb{x}||$ $(\forall \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n)$;
(e) $\langle A\mathbb{x}, A\mathbb{y} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$ $(\forall \mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{R}^n)$.

(証明) 略．(興味があれば，各自考えたり，調べたりしてみる)
($\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \mathbb{x} \bullet \mathbb{y} = \mathbb{x}^t\, \mathbb{y}$：ユークリッド内積に注意)
(a) $\Leftrightarrow$ (c) $A = (\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n)$ (A の j 列を $\mathbb{a}_j$) とすると，$(A^t)A$ の (i,j) 成分は $\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \langle \mathbb{a}_i, \mathbb{a}_j \rangle$ で，$\mathbb{a}_j$ 達が正規直交基底 $\Leftrightarrow (A^t)A = I_n$.
(a) $\Leftrightarrow$ (b) 同様に，行について $A(A^t)$ を考えればよい．(a) $\Leftrightarrow$ (e) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \mathbb{x}^t\, \mathbb{y}$ より，$\langle A\mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \langle \mathbb{x}, A^t\mathbb{y} \rangle$ から従う．(d) 各自考えてみる．

定理 28

A : $n \times n$ 行列．次は同値：
(a) A は直交行列　(i.e. $A^{-1} = A^t$);
(b) A の行ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；
(c) A の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；
(d) $||A\mathbb{x}|| = ||\mathbb{x}||$ $(\forall \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n)$;
(e) $\langle A\mathbb{x}, A\mathbb{y} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$ $(\forall \mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{R}^n)$.

(証明) 略．(興味があれば，各自考えたり，調べたりしてみる)
($\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \mathbb{x} \bullet \mathbb{y} = \mathbb{x}^t\,\mathbb{y}$: ユークリッド内積に注意)
(a) $\Leftrightarrow$ (c) $A = (\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n)$ (A の j 列を $\mathbb{a}_j$) とすると，$(A^t)A$ の (i,j) 成分は $\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \langle \mathbb{a}_i, \mathbb{a}_j \rangle$ で，$\mathbb{a}_j$ 達が正規直交基底 $\Leftrightarrow$ $(A^t)A = I_n$.
(a) $\Leftrightarrow$ (b) 同様に，行について $A(A^t)$ を考えればよい．(a) $\Leftrightarrow$ (e) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \mathbb{x}^t\,\mathbb{y}$ より，$\langle A\mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \langle \mathbb{x}, A^t\mathbb{y} \rangle$ から従う．(d) 各自考えてみる．

- 教 pp.243～247 練習問題 4.10 を各自みておく