はじめに　(線形代数 IIA)

$\boxed{\text{線形代数 II} \quad = \quad \text{線形代数 I のつづき}}$

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 ⟶ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

5.1　~~1 次変換~~ → 線形写像

定義 (線形写像，1 次変換)

V, W : 線形空間．写像 $F : V \to W$ が~~1 次変換~~ 線形写像 とは，
(i) $F(\mathbb{u}+\mathbb{v}) = F(\mathbb{u}) + F(\mathbb{v})$ $(\forall \mathbb{u}, \mathbb{v} \in V)$;
(ii) $F(k\,\mathbb{u}) = k\,F(\mathbb{u})$ $(\forall k \in \mathbb{R}, \forall \mathbb{u} \in V)$
をみたすこと．$V = W$ のとき，F を V 上の 1 次変換 という．

注意

(i) かつ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $F(k\,\mathbb{u}+l\,\mathbb{v}) = k\,F(\mathbb{u}) + l\,F(\mathbb{v})$ $(\forall k, l \in \mathbb{R}, \forall \mathbb{u}, \mathbb{v} \in V)$.
$\because$ $(\Rightarrow)$ OK. $(\Leftarrow)$ $k = l = 1$ と $l = 0$ で OK.

例

$A : m \times n$ 行列.
$T = T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \mathbb{x} \mapsto A\mathbb{x}$ は線形写像.
$\because A(\mathbb{u}+\mathbb{v}) = A\mathbb{u} + A\mathbb{v}$ より $T(\mathbb{u}+\mathbb{v}) = T(\mathbb{u}) + T(\mathbb{v})$,
$A(k\,\mathbb{u}) = k\,(A\mathbb{u})$ より $T(k\,\mathbb{u}) = k\,T(\mathbb{u})$.
例えば，$T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ は線形写像.

注意

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ は線形写像ではない.
$\because F(2x) = (2x)^2 = 4x^2 = 2^2F(x) \neq 2F(x)$. “線形” = “linear” = “1 次”

例

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.\ T = T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

$$\mathbb{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A\mathbb{v} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$ は線形写像.

この 1 次変換を θ ラジアン回転 という.

実際，$\mathbb{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$ と極座標表示すると，$\mathbb{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$

$$A\mathbb{v} = \begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi+\theta) \\ r\sin(\phi+\theta) \end{pmatrix}.$$

例

V, W : 線形空間．$T : V \to W$, $\mathbb{v} \mapsto \mathbb{o}$ は線形写像．(ゼロ写像 という)

$\because T(\mathbb{u}+\mathbb{v}) = \mathbb{o} = \mathbb{o} + \mathbb{o} = T(\mathbb{u}) + T(\mathbb{v})$,

$T(k\,\mathbb{u}) = \mathbb{o} = k\cdot\mathbb{o} = k\cdot T(\mathbb{u})$ $(\forall \mathbb{u}, \mathbb{v} \in V, k \in \mathbb{R})$.

例

$T: V \to V$, $\mathbb{v} \mapsto k \cdot \mathbb{v}$ は 1 次変換 (線形写像).
(比例拡大 $(k > 1)$, 比例縮小 $(0 < k < 1)$ という)
$\because T(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = k(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = k\,\mathbb{u} + k\,\mathbb{v} = T(\mathbb{u}) + T(\mathbb{v})$,
$T(l\,\mathbb{u}) = k(l\,\mathbb{u}) = l(k\,\mathbb{u}) = l \cdot T(\mathbb{u})$ $(\forall \mathbb{u}, \mathbb{v} \in V, l \in \mathbb{R})$.

例

V : 内積空間，$W \subset V$, $S = \{\mathbb{w}_1, \ldots, \mathbb{w}_r\}$: W の正規直交基底.
$T: V \to W$, $\mathbb{v} \mapsto \mathrm{proj}_W\, \mathbb{v} = \langle \mathbb{v}, \mathbb{w}_1 \rangle \mathbb{w}_1 + \cdots + \langle \mathbb{v}, \mathbb{w}_r \rangle \mathbb{w}_r$
: $\mathbb{v}$ の W への正射影は線形写像.
$\because$ 各自.（教 p.254)

例

V : 線形空間，S : V の基底，$(\mathbb{v})_S$: S に関する $\mathbb{v}$ の座標ベクトル.
$T: V \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{v} \mapsto (\mathbb{v})_S$ は線形写像.
$\because$ 各自.（教 p.255)

- 座標ベクトル $(\mathbb{v})_S$ のかわりに座標行列 $[\mathbb{v}]_S$ としても同様

例

V : 内積空間, $\mathbb{v}_0 \in V$. $T : V \to \mathbb{R}$, $\mathbb{v} \mapsto \langle \mathbb{v}, \mathbb{v}_0 \rangle$ は線形写像.
$\because T(\mathbb{u}+\mathbb{v}) = \langle \mathbb{u}+\mathbb{v}, \mathbb{v}_0 \rangle = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_0 \rangle + \langle \mathbb{v}, \mathbb{v}_0 \rangle = T(\mathbb{u}) + T(\mathbb{v})$,
$T(k\,\mathbb{u}) = \langle k\,\mathbb{u}, \mathbb{v}_0 \rangle = k\,\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_0 \rangle = k\,T(\mathbb{u})$.

例

$V := C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \text{連続}\}$,
$D : V \to V$, $f \mapsto f'$ (微分) は線形写像.
$\because D(f+g) = D(f) + D(g)$, $D(k\,f) = k\,D(f)$ $(\forall f, g \in V)$.

例

$V := C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \text{連続}\}$,
$J : V \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$ は線形写像.
$\because J(f+g) = \int_0^1 (f(x)+g(x))dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = J(f) + J(g)$,
$J(k\,f) = \int_0^1 kf(x) = k\int_0^1 f(x)dx = k\,J(f)$ $(\forall f, g \in V)$.

5.2 ~~1 次変換~~の性質 $\to$ 線形写像の性質；核と像

定理 1

$T : V \to W$: 線形写像.
(a) $T(\mathbb{o}) = \mathbb{o}$;
(b) $T(-\mathbb{v}) = -T(\mathbb{v})$ $(\forall \mathbb{v} \in V)$;
(c) $T(\mathbb{u} - \mathbb{v}) = T(\mathbb{u}) - T(\mathbb{v})$ $(\forall \mathbb{u}, \mathbb{v} \in V)$.

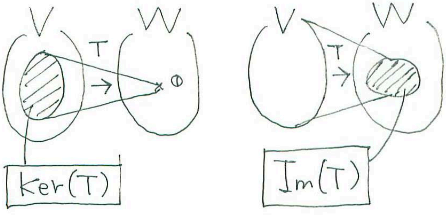
(証明) (a) $T(\mathbb{o}) = T(\mathbb{o} + \mathbb{o}) = T(\mathbb{o}) + T(\mathbb{o})$. $\therefore T(\mathbb{o}) = \mathbb{o}$.
(b) $T(-\mathbb{v}) = T((-1) \cdot \mathbb{v}) = -T(\mathbb{v})$.
(c) $T(\mathbb{u} - \mathbb{v}) = T(\mathbb{u} + (-1)\mathbb{v}) = T(\mathbb{u}) + T(-\mathbb{v}) \underset{(b)}{=} T(\mathbb{u}) - T(\mathbb{v})$. $\square$

定義 (核，像)

$T : V \to W$: 線形写像.

$\mathrm{Ker}(T) := \{\mathbb{v} \in V \mid T(\mathbb{v}) = \mathbb{o}\}$: T の核 ; (核 ⋯ kernel)

$\mathrm{Im}(T) := \{T(\mathbb{v}) \mid \mathbb{v} \in V\}$: T の像. (像 ⋯ image)



例

$T = T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbb{x} \mapsto A\mathbb{x}$ (A は $m \times n$ 行列).

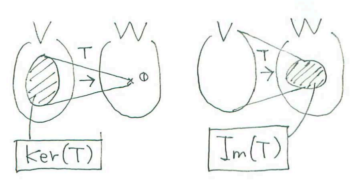
$\mathrm{Ker}(T_A) = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \mathbb{o}\}$: 連立方程式の解空間 ;

$\mathrm{Im}(T_A) = \{A\mathbb{x} \mid \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m \mid A\mathbb{x} = \mathbb{b}\,(\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n)\}$

$\underset{\text{定理 14}}{=} \{\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbb{b} \in C(A)\} = C(A)$.

定理 2

$T : V \to W$：線形写像.
(a) $\mathrm{Ker}(T) \subset V$：部分空間；
(b) $\mathrm{Im}(T) \subset W$：部分空間.



(証明) (a) $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2 \in \mathrm{Ker}(T), k \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2, k\,\mathbb{v}_1 \in \mathrm{Ker}(T)$ を示せばよい．($\because$ 4 章定理 4 より和とスカラー倍で閉じていればよい)

$T(\mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2) = T(\mathbb{v}_1) + T(\mathbb{v}_2) = \mathbb{o} + \mathbb{o} = \mathbb{o}. \quad \therefore \mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2 \in \mathrm{Ker}(T).$

$T(k\,\mathbb{v}_1) = k\,T(\mathbb{v}_1) = k\mathbb{o} = \mathbb{o}. \quad \therefore k\,\mathbb{v}_1 \in \mathrm{Ker}(T).$

(b) $\mathbb{w}_1, \mathbb{w}_2 \in \mathrm{Im}(T), k \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{w}_1 + \mathbb{w}_2, k\,\mathbb{w}_1 \in \mathrm{Im}(T)$ を示せばよい.

$\mathbb{w}_1, \mathbb{w}_2 \in \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \exists \mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2 \in V$ s.t. $T(\mathbb{u}_1) = \mathbb{w}_1,\ T(\mathbb{u}_2) = \mathbb{w}_2.$

$\therefore \mathbb{w}_1 + \mathbb{w}_2 = T(\mathbb{u}_1) + T(\mathbb{u}_2) = T(\mathbb{u}_1 + \mathbb{u}_2) \in \mathrm{Im}(T),$

$k\,\mathbb{w}_1 = k\,T(\mathbb{u}_1) = T(k\,\mathbb{u}_1) \in \mathrm{Im}(T).$ $\square$

注意

$T : V \to W$：線形写像，$\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} : V$ の基底.

$V \ni \mathbb{v} = k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n \Rightarrow T(\mathbb{v}) = k_1T(\mathbb{v}_1) + \cdots + k_nT(\mathbb{v}_n)$.

$\mathbb{v}$ の行先 $T(\mathbb{v})$ は基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ の行先 $T(\mathbb{v}_1), \ldots, T(\mathbb{v}_n)$ で決まる！