はじめに　(線形代数 IIA)

$\boxed{\text{線形代数 II} \quad = \quad \text{線形代数 I のつづき}}$

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

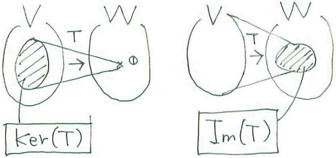
講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

定義 (T の階数，T の核次元)

V, W : 線形空間，$T : V \to W$: 線形写像.
$\mathrm{rank}(T) := \dim(\mathrm{Im}(T))$: T の 階数 ;
$\mathrm{nullity}(T) := \dim(\mathrm{Ker}(T))$: T の 核次元 (退化次数).
(核 = kernel = null space)



例

$T = T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbb{x} \mapsto A\mathbb{x}$ (A は $m \times n$ 行列).
$\mathrm{rank}(T_A) = \dim(\mathrm{Im}(T_A)) \underset{\text{定理 14}}{=} \dim(C(A)) = \mathrm{rank}(A)$;
$\mathrm{nullity}(T_A) = \dim(\mathrm{Ker}(T_A)) = \dim(\{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \mathbb{o}\})$
: 連立 1 次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ の解空間の次元.

- rank(T) と nullity(T) に関係はあるか？
  - (今後の授業で) 準同型定理 として一般化される重要な定理：

定理 3 (次元定理)

V, W：線形空間，$T : V \to W$：線形写像，$\dim(V) = n$
$\Rightarrow \mathrm{rank}(T) + \mathrm{nullity}(T) = n.$

(証明) 定義より，$\dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\mathrm{Ker}(T)) = n$ を示せばよい．
$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 0 \Leftrightarrow T$：ゼロ写像 $\Leftrightarrow r := \dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(V) = n$
より，$r < n$ とし，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r$：$\mathrm{Ker}(T)$ の基底をとる（$r = 0$ のときは，何もとらなくてよい）．4 章定理 9 より，
$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r, \mathbb{v}_{r+1}, \ldots, \mathbb{v}_n$ が V の基底とできる (基底の延長).
このとき，$S = \{T(\mathbb{v}_{r+1}), \ldots, T(\mathbb{v}_n)\}$ ($|S| = n - r$) が $\mathrm{Im}(T)$ の基底をなすことをいえば，証明おわり．

(1) $S = \{T(\mathbb{v}_{r+1}), \ldots, T(\mathbb{v}_n)\}$ は 1 次独立.

$k_{r+1}T(\mathbb{v}_{r+1}) + \cdots + k_nT(\mathbb{v}_n) = \mathbb{o}$

$\Rightarrow T(k_{r+1}\mathbb{v}_{r+1} + \cdots + k_n\mathbb{v}_n) = \mathbb{o}$

$\Rightarrow k_{r+1}\mathbb{v}_{r+1} + \cdots + k_n\mathbb{v}_n \in \mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r\}$

$\Rightarrow k_{r+1}\mathbb{v}_{r+1} + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \exists k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + \exists k_r\mathbb{v}_r$

$\Rightarrow -k_1\mathbb{v}_1 - \cdots - k_r\mathbb{v}_r + k_{r+1}\mathbb{v}_{r+1} + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o}$

$\Rightarrow k_1 = \cdots = k_n = 0.$ ($\because$ $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は 1 次独立)

(2) $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}\, S.$

$\mathbb{b} \in \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \exists \mathbb{v} \in V$ s.t. $T(\mathbb{v}) = \mathbb{b}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T(\mathbb{v}) &= T(c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_{r+1}\mathbb{v}_{r+1} + \cdots + c_n\mathbb{v}_n) \\
&= c_1T(\mathbb{v}_1) + \cdots + c_rT(\mathbb{v}_r) + c_{r+1}T(\mathbb{v}_{r+1}) + \cdots + c_nT(\mathbb{v}_n) \\
&= c_1 \ \ \mathbb{o} \ \ + \cdots + c_r \ \ \mathbb{o} \ \ + c_{r+1}T(\mathbb{v}_{r+1}) + \cdots + c_nT(\mathbb{v}_n) \\
&= c_{r+1}T(\mathbb{v}_{r+1}) + \cdots + c_nT(\mathbb{v}_n) \ (= \mathbb{b}). \\
&\quad (\because \ \mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r \in \mathrm{Ker}(T))
\end{aligned}$$

□

定理 4 (定理 3 の系)

A : $m \times n$ 行列．連立 1 次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ の解空間の次元は $n - \mathrm{rank}(A)$.

(証明) $T = T_A$ のとき，$\mathrm{rank}(T_A) = \mathrm{rank}(A)$,
$\mathrm{nullity}(T_A) = \dim(\mathrm{Ker}(T_A)) = \dim(\{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \mathbb{o}\})$: 連立 1 次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ の解空間の次元であった (上の例). □

例

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathbf{3}$
$\Rightarrow$ 連立 1 次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ の解空間 W の次元 $= 5 - \mathbf{3} = \mathbf{2}$.
実際，$\dim(W) = 2$ であった (第 6 回の例).

- すなわち，連立 1 次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は見た目上は 4 本であるが，実際は 3 本分で，解は $5 - \mathbf{3} = \mathbf{2}$ 次元分ある．

5.3　~~1次変換と行列~~　→　線形写像と行列

$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbb{x} \mapsto A\mathbb{x} \Rightarrow T_A$ は線形写像であった.
実は，この逆が成り立つ：

命題

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: 線形写像
$\Rightarrow \exists A : m \times n$ 行列 s.t. $T = T_A$.

(証明) $\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbb{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\mathbb{R}^n$ の標準基底に対して，

$A = (T(\mathbb{e}_1) \cdots T(\mathbb{e}_n))$ とする．(この A を $\underline{T \text{ の標準行列}}$ という)

$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbb{e}_1 + \cdots + x_n\mathbb{e}_n \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$T(\mathbb{x}) = x_1T(\mathbb{e}_1) + \cdots + x_nT(\mathbb{e}_n)$,

$$A\mathbb{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$= x_1T(\mathbb{e}_1) + \cdots + x_nT(\mathbb{e}_n)$.　$\therefore\ T(\mathbb{x}) = A\mathbb{x}$.　$\therefore\ T = T_A$.　□

例

線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$ の標準行列 A は,

$$A = (T(\mathbb{e}_1)\ T(\mathbb{e}_2)\ T(\mathbb{e}_3)) = \left(T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\ T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\ T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

• 次に，一般の $T : V \to W$ ：線形写像に対し，
“T の行列 A” を得る方法を述べる．それには，
$B = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} : V$ の基底，$B' = \{\mathbb{w}_1, \ldots, \mathbb{w}_m\} : W$ の基底，

$$
\begin{array}{cccc}
T : & V & \longrightarrow & W \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& \mathbb{x} & \longmapsto & T(\mathbb{x}) \\
& \downarrow & & \downarrow \\
& [\mathbb{x}]_B & \mapsto & [T(\mathbb{x})]_{B'} \\
& \cap & & \cap \\
& \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m
\end{array}
$$

に対して，$[T(\mathbb{x})]_{B'} = A\,[\mathbb{x}]_B$ をみたす $m \times n$ 行列 A をとればよい．

特に，$\mathbb{x} = \mathbb{v}_i$ とすれば，$[\mathbb{v}_i]_B = \mathbb{e}_i$ (標準単位ベクトル) で，

$[T(\mathbb{v}_i)]_{B'} = A\,[\mathbb{v}_i]_B = A\,\mathbb{e}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ ：A の i 列より，

$A = ([T(\mathbb{v}_1)]_{B'} \cdots [T(\mathbb{v}_n)]_{B'})$.

(A を基底 B, B' に関する T の行列 という．特に，T が 1 次変換
$(V = W)$ で $B = B'$ のとき，(単に) 基底 B に関する T の行列 という．)

- cf. 基底変換問題の解 (第 10 回) (cf. ⋯ 比較，参照せよの意)