はじめに　(線形代数 IIA)

$\boxed{\text{線形代数 II} \quad = \quad \text{線形代数 I のつづき}}$

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 ⟶ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

6.2 (6.3)　対角化法 (直交対角化法)

6.2 (6.3)　対角化法 (直交対角化法)

問

V : 線形空間 (内積空間), $\dim(V) < \infty$.
$T : V \to V$: 1 次変換に対して，T の行列が対角行列となる
V の基底 B (正規直交基底 B) は存在するか？

6.2 (6.3)　対角化法 (直交対角化法)

問

V : 線形空間 (内積空間), $\dim(V) < \infty$.
$T : V \to V$: 1 次変換に対して，T の行列が対角行列となる
V の基底 B (正規直交基底 B) は存在するか？

問 ′

A : 正方行列．$\exists ?P$: 可逆 (正則) 行列 (直交行列) s.t. $P^{-1}AP$: 対角行列.
このとき，A を 対角化可能 (直交対角化可能) という．

6.2 (6.3)　対角化法 (直交対角化法)

問

V : 線形空間 (内積空間)，$\dim(V) < \infty$.
$T : V \to V$: 1 次変換に対して，T の行列が対角行列となる
V の基底 B (正規直交基底 B) は存在するか？

問 ′

A : 正方行列．$\exists ? P$: 可逆 (正則) 行列 (直交行列) s.t. $P^{-1}AP$: 対角行列.
このとき，A を 対角化可能 (直交対角化可能) という.

- 5.4 の定理 5 (と 4.10 の定理 28) より，問 $\Leftrightarrow$ 問 ′ (同値)

定理 2 (定理 5)

A : $n \times n$ 行列．次は同値：

定理 2 (定理 5)

A : $n \times n$ 行列．次は同値：

(a) A は対角化可能 (直交対角化可能)；

定理 2 (定理 5)

$A : n \times n$ 行列．次は同値：

(a) A は対角化可能 (直交対角化可能)；

(b) A は n 個の 1 次独立な (正規直交する) 固有ベクトルをもつ.

定理 2 (定理 5)

A : $n \times n$ 行列．次は同値：
(a) A は対角化可能 (直交対角化可能)；
(b) A は n 個の 1 次独立な (正規直交する) 固有ベクトルをもつ．

(証明)

定理 2 (定理 5)

$A : n \times n$ 行列．次は同値：
(a) A は対角化可能 (直交対角化可能)；
(b) A は n 個の 1 次独立な (正規直交する) 固有ベクトルをもつ．

(証明) $(a) \Leftrightarrow \exists P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は可逆行列 (直交行列) s.t.

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ ：対角行列

定理 2 (定理 5)

A : $n \times n$ 行列．次は同値：
(a) A は対角化可能 (直交対角化可能)；
(b) A は n 個の 1 次独立な (正規直交する) 固有ベクトルをもつ．

(証明) $(a) \Leftrightarrow \exists P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は可逆行列 (直交行列) s.t.
$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$: 対角行列
$\Leftrightarrow$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は A の固有値，$\mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_n$ は A の (λ に対する) 固有ベクトル，$P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は可逆行列 (直交行列) $\Leftrightarrow (b)$.

定理 2 (定理 5)

A：$n \times n$ 行列．次は同値：

(a) A は対角化可能 (直交対角化可能)；

(b) A は n 個の 1 次独立な (正規直交する) 固有ベクトルをもつ．

(証明) (a) $\Leftrightarrow \exists P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は可逆行列 (直交行列) s.t.

$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$：対角行列

$\Leftrightarrow$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は A の固有値，$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$ は A の (λ に対する) 固有ベクトル，$P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は可逆行列 (直交行列) $\Leftrightarrow$ (b).

$\because$ $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow (A\mathbb{p}_1 \cdots A\mathbb{p}_n) = (\lambda_1\mathbb{p}_1 \cdots \lambda_n\mathbb{p}_n)$. □

定理 2 (定理 5)

A : $n \times n$ 行列．次は同値：
(a) A は対角化可能 (直交対角化可能)；
(b) A は n 個の 1 次独立な (正規直交する) 固有ベクトルをもつ．

(証明) (a) $\Leftrightarrow \exists P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は可逆行列 (直交行列) s.t.

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ ：対角行列

$\Leftrightarrow$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は A の固有値，$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$ は A の (λ に対する) 固有ベクトル，$P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は可逆行列 (直交行列) $\Leftrightarrow$ (b).

$\because$ $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow (A\mathbb{p}_1 \cdots A\mathbb{p}_n) = (\lambda_1\mathbb{p}_1 \cdots \lambda_n\mathbb{p}_n)$. $\square$

対角化法 (直交対角化法)

Step 1. A の 1 次独立な (正規直交する) 固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$ をとる．

定理 2 (定理 5)

A：$n \times n$ 行列．次は同値：
(a) A は対角化可能 (直交対角化可能)；
(b) A は n 個の 1 次独立な (正規直交する) 固有ベクトルをもつ．

(証明) (a) $\Leftrightarrow \exists P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は可逆行列 (直交行列) s.t.
$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$：対角行列
$\Leftrightarrow$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は A の固有値，$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$ は A の (λ に対する) 固有ベクトル，$P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は可逆行列 (直交行列) $\Leftrightarrow$ (b).
$\because$ $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow (A\mathbb{p}_1 \cdots A\mathbb{p}_n) = (\lambda_1\mathbb{p}_1 \cdots \lambda_n\mathbb{p}_n)$. □

対角化法 (直交対角化法)

Step 1. A の 1 次独立な (正規直交する) 固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$ をとる．
Step 2. $P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ とする．(P は可逆行列 (直交行列) となる)

定理 2 (定理 5)

A : $n \times n$ 行列．次は同値：
(a) A は対角化可能 (直交対角化可能)；
(b) A は n 個の 1 次独立な (正規直交する) 固有ベクトルをもつ．

(証明) $(a) \Leftrightarrow \exists P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は可逆行列 (直交行列) s.t.

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$: 対角行列

$\Leftrightarrow$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は A の固有値，$\mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_n$ は A の (λ に対する) 固有ベクトル，$P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は可逆行列 (直交行列) $\Leftrightarrow (b)$.

$\because$ $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow (A\mathbb{p}_1 \cdots A\mathbb{p}_n) = (\lambda_1\mathbb{p}_1 \cdots \lambda_n\mathbb{p}_n)$. $\square$

対角化法 (直交対角化法)

Step 1. A の 1 次独立な (正規直交する) 固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_n$ をとる．
Step 2. $P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ とする．(P は可逆行列 (直交行列) となる)
Step 3. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$: 対角行列．(λ_i は $\mathbb{p}_i$ に関する固有値)

例

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

例

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

A の固有方程式

$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0$ より,

例

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

A の固有方程式

$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0$ より,

A の固有値は $\lambda = a$ (2 重根).

例

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

A の固有方程式

$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0$ より,

A の固有値は $\lambda = a$ (2 重根). 固有空間

$W_a = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$ の基底

$\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dim(W_a) = 2$.

例

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

A の固有方程式

$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0$ より,

A の固有値は $\lambda = a$ (2 重根). 固有空間

$W_a = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$ の基底

$\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dim(W_a) = 2$. (当然) A は対角化可能.

例

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

A の固有方程式
$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0$ より,
A の固有値は $\lambda = a$ (2 重根). 固有空間
$W_a = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$ の基底
$\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dim(W_a) = 2$. (当然) A は対角化可能.

一方で, B の固有方程式
$\det(\lambda I - B) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a & -1 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0$ より,

例

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

A の固有方程式

$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0$ より,

A の固有値は $\lambda = a$ (2 重根). 固有空間

$W_a = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$ の基底

$\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dim(W_a) = 2$. (当然) A は対角化可能.

一方で, B の固有方程式

$\det(\lambda I - B) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a & -1 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0$ より,

B の固有値は $\lambda = a$ (2 重根).

例

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

A の固有方程式

$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0$ より,

A の固有値は $\lambda = a$ (2 重根). 固有空間

$W_a = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$ の基底

$\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dim(W_a) = 2$. (当然) A は対角化可能.

一方で, B の固有方程式

$\det(\lambda I - B) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a & -1 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0$ より,

B の固有値は $\lambda = a$ (2 重根). 固有空間

$W_a = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

例

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

A の固有方程式

$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0$ より，

A の固有値は $\lambda = a$ (2 重根). 固有空間

$W_a = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$ の基底

$\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dim(W_a) = 2$. (当然) A は対角化可能.

一方で，B の固有方程式

$\det(\lambda I - B) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a & -1 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0$ より，

B の固有値は $\lambda = a$ (2 重根). 固有空間

$W_a = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \left\{ \mathbb{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \mathbb{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ (t \in \mathbb{R}) \right\}$ の基底 $\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dim(W_a) = 1$.

例

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

A の固有方程式

$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0$ より,

A の固有値は $\lambda = a$ (2 重根). 固有空間

$W_a = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$ の基底

$\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dim(W_a) = 2$. (当然) A は対角化可能.

一方で, B の固有方程式

$\det(\lambda I - B) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a & -1 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0$ より,

B の固有値は $\lambda = a$ (2 重根). 固有空間

$$W_a = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ \mathbb{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \mathbb{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (t \in \mathbb{R}) \right\}$$ の基底 $\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dim(W_a) = 1$.

定理 2 から, B は対角化不可能.

応用：A^n を求める

例 (前回の例のつづき)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

例 (前回の例のつづき)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

固有空間 W_1 の基底 $\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, W_5 の基底 $\mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

応用：A^n を求める

例 (前回の例のつづき)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

固有空間 W_1 の基底 $\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, W_5 の基底 $\mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$P = (\mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2\ \mathbb{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば,

応用：A^n を求める

例 (前回の例のつづき)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

固有空間 W_1 の基底 $\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, W_5 の基底 $\mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$P = (\mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2\ \mathbb{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = D$.

応用：A^n を求める

例 (前回の例のつづき)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

固有空間 W_1 の基底 $\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, W_5 の基底 $\mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$P = (\mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2\ \mathbb{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = D$.

$\therefore\ A = PDP^{-1}$.

応用：A^n を求める

例 (前回の例のつづき)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

固有空間 W_1 の基底 $\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, W_5 の基底 $\mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$P = (\mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2\ \mathbb{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = D.$

$\therefore\ A = PDP^{-1}.$

$\therefore\ A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})(PDP^{-1})$

応用：A^n を求める

例 (前回の例のつづき)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

固有空間 W_1 の基底 $\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, W_5 の基底 $\mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$P = (\mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2\ \mathbb{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = D$.

$\therefore\ A = PDP^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
\therefore\ A^n &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \\
&= (PD\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}D\cancel{P^{-1}})\cdots(\cancel{P}D\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}DP^{-1}) = PD^nP^{-1}
\end{aligned}
$$

応用：A^n を求める

例 (前回の例のつづき)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

固有空間 W_1 の基底 $\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, W_5 の基底 $\mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$P = (\mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2\ \mathbb{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = D$.

$\therefore\ A = PDP^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\therefore\ A^n &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \\
&= (PD\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}D\cancel{P^{-1}})\cdots(\cancel{P}D\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}DP^{-1}) = PD^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

応用：A^n を求める

例 (前回の例のつづき)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

固有空間 W_1 の基底 $\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, W_5 の基底 $\mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$P = (\mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2\ \mathbb{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = D$.

$$\therefore\ A = PDP^{-1}.$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ A^n &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \\
&= (PD\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}D\cancel{P^{-1}})\cdots(\cancel{P}D\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}DP^{-1}) = PD^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+5^n) & \frac{1}{2}(1-5^n) & 0 \\ \frac{1}{2}(1-5^n) & \frac{1}{2}(1+5^n) & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

定理 3

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に対する固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次独立.

定理 3

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に対する固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次独立.

(証明)

定理 3

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に対する固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次独立.

(証明) (背理法)

定理 3

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に対する
固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次独立.

(証明) (背理法) 仮に $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次従属と仮定してみる.

定理 3

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に対する固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次独立.

(証明) (背理法) 仮に $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次従属と仮定してみる.
$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_l$ が 1 次独立となる最大の $1 \leq l < k$ をとる

定理 3

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に対する
固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次独立.

(証明) (背理法) 仮に $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次従属と仮定してみる.
$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_l$ が 1 次独立となる最大の $1 \leq l < k$ をとる
$\Rightarrow \mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_{l+1}$ は 1 次従属

定理 3

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に対する
固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次独立.

(証明) (背理法) 仮に $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次従属と仮定してみる.
$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_l$ が 1 次独立となる最大の $1 \leq l < k$ をとる
$\Rightarrow \mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_{l+1}$ は 1 次従属
$\Rightarrow c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1} = \mathbb{o} \ (\exists(c_1, \ldots, c_{l+1}) \neq (0, \ldots, 0)) \quad \cdots (1)$

定理 3

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に対する
固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次独立.

(証明) (背理法) 仮に $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次従属と仮定してみる.
$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_l$ が 1 次独立となる最大の $1 \leq l < k$ をとる
$\Rightarrow \mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_{l+1}$ は 1 次従属
$\Rightarrow c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1} = \mathbb{o}$ $(\exists(c_1, \ldots, c_{l+1}) \neq (0, \ldots, 0))$ $\cdots$ (1)
$\Rightarrow A(c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1}) = \mathbb{o}$

定理 3

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に対する
固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次独立.

(証明) (背理法) 仮に $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次従属と仮定してみる.
$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_l$ が 1 次独立となる最大の $1 \leq l < k$ をとる
$\Rightarrow \mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_{l+1}$ は 1 次従属
$\Rightarrow c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1} = \mathbb{o}$ $(\exists(c_1, \ldots, c_{l+1}) \neq (0, \ldots, 0))$ $\cdots$ (1)
$\Rightarrow A(c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1}) = \mathbb{o}$
$\Rightarrow c_1\lambda_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\lambda_{l+1}\mathbb{p}_{l+1} = \mathbb{o}$ $\cdots$ (2)

定理 3

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に対する
固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次独立.

(証明) (背理法) 仮に $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次従属と仮定してみる.

$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_l$ が 1 次独立となる最大の $1 \leq l < k$ をとる

$\Rightarrow \mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_{l+1}$ は 1 次従属

$\Rightarrow c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1} = \mathbb{o}$ $(\exists(c_1, \ldots, c_{l+1}) \neq (0, \ldots, 0))$ $\cdots$ (1)

$\Rightarrow A(c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1}) = \mathbb{o}$

$\Rightarrow c_1\lambda_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\lambda_{l+1}\mathbb{p}_{l+1} = \mathbb{o}$ $\cdots$ (2)

$\Rightarrow c_1(\lambda_{l+1} - \lambda_1)\mathbb{p}_1 + \cdots + c_l(\lambda_{l+1} - \lambda_l)\mathbb{p}_l = \mathbb{o}$ $\cdots$ (1) $\times \lambda_{l+1}$ − (2)

定理 3

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に対する
固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次独立.

(証明) (背理法) 仮に $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次従属と仮定してみる.

$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_l$ が 1 次独立となる最大の $1 \leq l < k$ をとる

$\Rightarrow \mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_{l+1}$ は 1 次従属

$\Rightarrow c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1} = \mathbb{o}$ $(\exists(c_1, \ldots, c_{l+1}) \neq (0, \ldots, 0))$ $\cdots$ (1)

$\Rightarrow A(c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1}) = \mathbb{o}$

$\Rightarrow c_1\lambda_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\lambda_{l+1}\mathbb{p}_{l+1} = \mathbb{o}$ $\cdots$ (2)

$\Rightarrow c_1(\lambda_{l+1} - \lambda_1)\mathbb{p}_1 + \cdots + c_l(\lambda_{l+1} - \lambda_l)\mathbb{p}_l = \mathbb{o}$ $\cdots$ (1) $\times \lambda_{l+1} -$ (2)

$\Rightarrow c_1(\lambda_{l+1} - \lambda_1) = \cdots = c_l(\lambda_{l+1} - \lambda_l) = 0$ $(\because \mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_l$ は 1 次独立$)$

定理 3

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ に対する固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_k$ は 1 次独立.

(証明) (背理法) 仮に $\mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_k$ は 1 次従属と仮定してみる.
$\mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_l$ が 1 次独立となる最大の $1 \le l < k$ をとる
$\Rightarrow \mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_{l+1}$ は 1 次従属
$\Rightarrow c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1} = \mathbb{o}$ $(\exists(c_1, \dots, c_{l+1}) \neq (0, \dots, 0))$ $\cdots$ (1)
$\Rightarrow A(c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1}) = \mathbb{o}$
$\Rightarrow c_1\lambda_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\lambda_{l+1}\mathbb{p}_{l+1} = \mathbb{o}$ $\cdots$ (2)
$\Rightarrow c_1(\lambda_{l+1} - \lambda_1)\mathbb{p}_1 + \cdots + c_l(\lambda_{l+1} - \lambda_l)\mathbb{p}_l = \mathbb{o}$ $\cdots$ (1) $\times \lambda_{l+1} -$ (2)
$\Rightarrow c_1(\lambda_{l+1} - \lambda_1) = \cdots = c_l(\lambda_{l+1} - \lambda_l) = 0$ $(\because \mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_l$ は 1 次独立$)$
$\Rightarrow c_1 = \cdots = c_l = 0$ $(\because \lambda_i \neq \lambda_j\ (i \neq j))$

定理 3

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に対する固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次独立.

(証明) (背理法) 仮に $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次従属と仮定してみる.

$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_l$ が 1 次独立となる最大の $1 \leq l < k$ をとる

$\Rightarrow \mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_{l+1}$ は 1 次従属

$\Rightarrow c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1} = \mathbb{o}$ $(\exists (c_1, \ldots, c_{l+1}) \neq (0, \ldots, 0))$ $\cdots$ (1)

$\Rightarrow A(c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1}) = \mathbb{o}$

$\Rightarrow c_1\lambda_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\lambda_{l+1}\mathbb{p}_{l+1} = \mathbb{o}$ $\cdots$ (2)

$\Rightarrow c_1(\lambda_{l+1} - \lambda_1)\mathbb{p}_1 + \cdots + c_l(\lambda_{l+1} - \lambda_l)\mathbb{p}_l = \mathbb{o}$ $\cdots$ (1) $\times \lambda_{l+1} -$ (2)

$\Rightarrow c_1(\lambda_{l+1} - \lambda_1) = \cdots = c_l(\lambda_{l+1} - \lambda_l) = 0$ $(\because \mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_l$ は 1 次独立$)$

$\Rightarrow c_1 = \cdots = c_l = 0$ $(\because \lambda_i \neq \lambda_j \ (i \neq j))$

$\Rightarrow c_{l+1} = 0$

定理 3

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ に対する
固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_k$ は 1 次独立.

(証明) (背理法) 仮に $\mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_k$ は 1 次従属と仮定してみる.
$\mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_l$ が 1 次独立となる最大の $1 \leq l < k$ をとる
$\Rightarrow \mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_{l+1}$ は 1 次従属
$\Rightarrow c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1} = \mathbb{o} \ (\exists(c_1, \dots, c_{l+1}) \neq (0, \dots, 0)) \quad \cdots (1)$
$\Rightarrow A(c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1}) = \mathbb{o}$
$\Rightarrow c_1\lambda_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\lambda_{l+1}\mathbb{p}_{l+1} = \mathbb{o} \quad \cdots (2)$
$\Rightarrow c_1(\lambda_{l+1} - \lambda_1)\mathbb{p}_1 + \cdots + c_l(\lambda_{l+1} - \lambda_l)\mathbb{p}_l = \mathbb{o} \quad \cdots (1) \times \lambda_{l+1} - (2)$
$\Rightarrow c_1(\lambda_{l+1} - \lambda_1) = \cdots = c_l(\lambda_{l+1} - \lambda_l) = 0 \quad (\because \mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_l$ は 1 次独立$)$
$\Rightarrow c_1 = \cdots = c_l = 0 \quad (\because \lambda_i \neq \lambda_j \ (i \neq j))$
$\Rightarrow c_{l+1} = 0 \quad (\because (1)$ より$)$

定理 3

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に対する
固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次独立.

(証明) (背理法) 仮に $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_k$ は 1 次従属と仮定してみる.

$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_l$ が 1 次独立となる最大の $1 \leq l < k$ をとる

$\Rightarrow \mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_{l+1}$ は 1 次従属

$\Rightarrow c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1} = \mathbb{o}\ (\exists(c_1, \ldots, c_{l+1}) \neq (0, \ldots, 0)) \quad \cdots (1)$

$\Rightarrow A(c_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\mathbb{p}_{l+1}) = \mathbb{o}$

$\Rightarrow c_1\lambda_1\mathbb{p}_1 + \cdots + c_{l+1}\lambda_{l+1}\mathbb{p}_{l+1} = \mathbb{o} \quad \cdots (2)$

$\Rightarrow c_1(\lambda_{l+1} - \lambda_1)\mathbb{p}_1 + \cdots + c_l(\lambda_{l+1} - \lambda_l)\mathbb{p}_l = \mathbb{o} \quad \cdots (1) \times \lambda_{l+1} - (2)$

$\Rightarrow c_1(\lambda_{l+1} - \lambda_1) = \cdots = c_l(\lambda_{l+1} - \lambda_l) = 0 \quad (\because \mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_l$ は 1 次独立$)$

$\Rightarrow c_1 = \cdots = c_l = 0 \quad (\because \lambda_i \neq \lambda_j\ (i \neq j))$

$\Rightarrow c_{l+1} = 0 \quad (\because (1)$ より$) \Rightarrow (1)$ に矛盾. $\square$

定理 4 (定理 3 の系)

$A : n \times n$ 行列が n 個の相異なる固有値をもつ $\Rightarrow$ A は対角化可能.

定理 4 (定理 3 の系)

$A : n \times n$ 行列が n 個の相異なる固有値をもつ $\Rightarrow$ A は対角化可能.

(証明) 定理 2 ＋定理 3. $\square$

定理 4 (定理 3 の系)

$A: n \times n$ 行列が n 個の相異なる固有値をもつ $\Rightarrow$ A は対角化可能.

(証明) 定理 2 ＋定理 3. □

- 定理 4 の逆 ($\Leftarrow$) は成り立たない

定理 4 (定理 3 の系)

$A : n \times n$ 行列が n 個の相異なる固有値をもつ $\Rightarrow$ A は対角化可能.

(証明) 定理 2 ＋定理 3. □

- 定理 4 の逆 ($\Leftarrow$) は成り立たない

定理 2′ [(a) ⇔ (b) は定理 2]

$A : n \times n$ 行列．次は同値：

(a) A は対角化可能；

(b) A は n 個の 1 次独立な固有ベクトルをもつ；

(c) A の固有方程式の解はすべて実数であり,

各固有値 λ_i (k_i 重根) に対して，$\dim(W_{\lambda_i}) = k_i$.

定理 4 (定理 3 の系)

$A : n \times n$ 行列が n 個の相異なる固有値をもつ $\Rightarrow$ A は対角化可能.

(証明) 定理 2 ＋定理 3. □

- 定理 4 の逆 ($\Leftarrow$) は成り立たない

定理 2′ [$(a) \Leftrightarrow (b)$ は定理 2]

$A : n \times n$ 行列．次は同値：
(a) A は対角化可能；
(b) A は n 個の 1 次独立な固有ベクトルをもつ；
(c) A の固有方程式の解はすべて実数であり,
各固有値 λ_i (k_i 重根) に対して，$\dim(W_{\lambda_i}) = k_i$.

(証明)

定理 4 (定理 3 の系)

$A : n \times n$ 行列が n 個の相異なる固有値をもつ $\Rightarrow$ A は対角化可能.

(証明) 定理 2 ＋定理 3. □

- 定理 4 の逆 ($\Leftarrow$) は成り立たない

定理 2′ [$(a) \Leftrightarrow (b)$ は定理 2]

$A : n \times n$ 行列．次は同値：
(a) A は対角化可能；
(b) A は n 個の 1 次独立な固有ベクトルをもつ；
(c) A の固有方程式の解はすべて実数であり,
各固有値 λ_i (k_i 重根) に対して，$\dim(W_{\lambda_i}) = k_i$.

(証明) $(c) \Rightarrow (b)$ は定理 3 より従う.

定理 4 (定理 3 の系)

$A : n \times n$ 行列が n 個の相異なる固有値をもつ $\Rightarrow A$ は対角化可能.

(証明) 定理 2 ＋定理 3. □

- 定理 4 の逆 ($\Leftarrow$) は成り立たない

定理 2′ [$(a) \Leftrightarrow (b)$ は定理 2]

$A : n \times n$ 行列．次は同値：

(a) A は対角化可能；

(b) A は n 個の 1 次独立な固有ベクトルをもつ；

(c) A の固有方程式の解はすべて実数であり，

各固有値 λ_i (k_i 重根) に対して，$\dim(W_{\lambda_i}) = k_i$.

(証明) $(c) \Rightarrow (b)$ は定理 3 より従う．$(b) \Rightarrow (c)$ もよい (各自考える). □

6.3 直交対角化法；対称行列

定理 6

$A : n \times n$ 行列．A は直交対角化可能 $\Rightarrow$ A は対称行列, i.e. $A^t = A$.

定理 6

A : $n \times n$ 行列. A は直交対角化可能 $\Rightarrow$ A は対称行列, i.e. $A^t = A$.

(証明)

6.3　直交対角化法；対称行列

定理 6

$A : n \times n$ 行列．A は直交対角化可能 $\Rightarrow$ A は対称行列, i.e. $A^t = A$.

(証明) $P^{-1}AP = D$ (対角行列) かつ $P^{-1} = P^t$ (直交行列)

定理 6

$A : n \times n$ 行列． A は直交対角化可能 $\Rightarrow$ A は対称行列, i.e. $A^t = A$.

(証明) $P^{-1}AP = D$ (対角行列) かつ $P^{-1} = P^t$ (直交行列)
$\Rightarrow A^t = (PDP^{-1})^t = (PDP^t)^t = PDP^t = PDP^{-1} = A.$ □

6.3　直交対角化法；対称行列

定理 6

$A : n \times n$ 行列． A は直交対角化可能 $\Rightarrow$ A は対称行列, i.e. $A^t = A$.

(証明) $P^{-1}AP = D$ (対角行列) かつ $P^{-1} = P^t$ (直交行列)
$\Rightarrow A^t = (PDP^{-1})^t = (PDP^t)^t = PDP^t = PDP^{-1} = A.$ □

注意

実は，定理 6 の逆 ($\Leftarrow$) も成立．

6.3 直交対角化法；対称行列

定理 6

$A : n \times n$ 行列．A は直交対角化可能 $\Rightarrow$ A は対称行列, i.e. $A^t = A$.

(証明) $P^{-1}AP = D$ (対角行列) かつ $P^{-1} = P^t$ (直交行列)
$\Rightarrow A^t = (PDP^{-1})^t = (PDP^t)^t = PDP^t = PDP^{-1} = A.$ $\square$

注意

実は，定理 6 の逆 ($\Leftarrow$) も成立．つまり，対称行列 A の固有方程式の解はすべて実数で，各固有値 λ_i (k_i 重根) に対して，$\dim(W_{\lambda_i}) = k_i$ (定理 2$'$).

6.3 直交対角化法；対称行列

定理 6

A：$n \times n$ 行列．A は直交対角化可能 $\Rightarrow$ A は対称行列, i.e. $A^t = A$.

(証明) $P^{-1}AP = D$ (対角行列) かつ $P^{-1} = P^t$ (直交行列)

$\Rightarrow A^t = (PDP^{-1})^t = (PDP^t)^t = PDP^t = PDP^{-1} = A$. □

注意

実は，定理 6 の逆 ($\Leftarrow$) も成立．つまり，対称行列 A の固有方程式の解はすべて実数で，各固有値 λ_i (k_i 重根) に対して，$\dim(W_{\lambda_i}) = k_i$ (定理 2′).

例

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ は直交対角化可能であり，

6.3　直交対角化法；対称行列

定理 6

A : $n \times n$ 行列．A は直交対角化可能 $\Rightarrow$ A は対称行列, i.e. $A^t = A$.

(証明) $P^{-1}AP = D$ (対角行列) かつ $P^{-1} = P^t$ (直交行列)

$\Rightarrow A^t = (PDP^{-1})^t = (PDP^t)^t = PDP^t = PDP^{-1} = A$. □

注意

実は，定理 6 の逆 ($\Leftarrow$) も成立．つまり，対称行列 A の固有方程式の解はすべて実数で，各固有値 λ_i (k_i 重根) に対して，$\dim(W_{\lambda_i}) = k_i$ (定理 2′).

例

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ は直交対角化可能であり，固有方程式

$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 4)^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$ より，

6.3 直交対角化法；対称行列

定理 6

$A : n \times n$ 行列． A は直交対角化可能 $\Rightarrow$ A は対称行列, i.e. $A^t = A$.

(証明) $P^{-1}AP = D$ (対角行列) かつ $P^{-1} = P^t$ (直交行列)
$\Rightarrow A^t = (PDP^{-1})^t = (PDP^t)^t = PDP^t = PDP^{-1} = A$. □

注意

実は，定理 6 の逆 ($\Leftarrow$) も成立．つまり，対称行列 A の固有方程式の解はすべて実数で，各固有値 λ_i (k_i 重根) に対して，$\dim(W_{\lambda_i}) = k_i$ (定理 2′).

例

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ は直交対角化可能であり，固有方程式
$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 4)^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$ より，
$\dim(W_4) = 2$, $\dim(W_1) = 2$, $\dim(W_2) = 1$. (各自直接たしかめてみる)

定理 7

対称行列 A の固有値 $\lambda \neq \lambda'$, $\mathbb{p} \in W_\lambda, \mathbb{p}' \in W_{\lambda'} \Rightarrow \langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = 0$ (直交).

定理 7

対称行列 A の固有値 $\lambda \neq \lambda'$, $\mathbb{p} \in W_\lambda, \mathbb{p}' \in W_{\lambda'} \Rightarrow \langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = 0$ (直交).

(証明)

定理 7

対称行列 A の固有値 $\lambda \neq \lambda'$, $\mathbb{p} \in W_\lambda, \mathbb{p}' \in W_{\lambda'} \Rightarrow \langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = 0$ (直交).

(証明) $\mathbb{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ \vdots \\ p'_n \end{pmatrix}$ に対して，$\langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = \mathbb{p}^t\, \mathbb{p}' = 0$ を示せばよい.

定理 7

対称行列 A の固有値 $\lambda \neq \lambda'$, $\mathbb{p} \in W_\lambda, \mathbb{p}' \in W_{\lambda'} \Rightarrow \langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = 0$ (直交).

(証明) $\mathbb{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ \vdots \\ p'_n \end{pmatrix}$ に対して，$\langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = {}^t\mathbb{p}\, \mathbb{p}' = 0$ を示せばよい．1×1 行列 (a) に対して，${}^t(a) = (a)$ に注意すれば,

定理 7

対称行列 A の固有値 $\lambda \neq \lambda'$, $\mathbb{p} \in W_\lambda, \mathbb{p}' \in W_{\lambda'} \Rightarrow \langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = 0$ (直交).

(証明) $\mathbb{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ \vdots \\ p'_n \end{pmatrix}$ に対して，$\langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = \mathbb{p}^t\,\mathbb{p}' = 0$ を示せばよい．1×1 行列 (a) に対して，$(a)^t = (a)$ に注意すれば,

$\lambda \mathbb{p}^t \mathbb{p}' = \lambda (\mathbb{p}'^t \mathbb{p})^t = \lambda(\mathbb{p}'^t \mathbb{p}) = \mathbb{p}'^t(\lambda \mathbb{p}) = \mathbb{p}'^t(A\mathbb{p}) = (\mathbb{p}^t A^t \mathbb{p}')^t$
$= \mathbb{p}^t A^t \mathbb{p}' = \mathbb{p}^t A \mathbb{p}' = \mathbb{p}^t(\lambda' \mathbb{p}') = \lambda' \mathbb{p}^t \mathbb{p}'$.

定理 7

対称行列 A の固有値 $\lambda \neq \lambda'$, $\mathbb{p} \in W_\lambda, \mathbb{p}' \in W_{\lambda'} \Rightarrow \langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = 0$ (直交).

(証明) $\mathbb{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ \vdots \\ p'_n \end{pmatrix}$ に対して，$\langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = \mathbb{p}^t\, \mathbb{p}' = 0$ を示せばよい．1×1 行列 (a) に対して，$(a)^t = (a)$ に注意すれば,

$\lambda \mathbb{p}^t \mathbb{p}' = \lambda(\mathbb{p}'^t \mathbb{p})^t = \lambda(\mathbb{p}'^t \mathbb{p}) = \mathbb{p}'^t(\lambda \mathbb{p}) = \mathbb{p}'^t(A\mathbb{p}) = (\mathbb{p}^t A^t \mathbb{p}')^t$
$= \mathbb{p}^t A^t \mathbb{p}' = \mathbb{p}^t A \mathbb{p}' = \mathbb{p}^t(\lambda' \mathbb{p}') = \lambda' \mathbb{p}^t \mathbb{p}'$.
$\therefore\ (\lambda - \lambda')\mathbb{p}^t \mathbb{p}' = 0$.

定理 7

対称行列 A の固有値 $\lambda \neq \lambda'$, $\mathbb{p} \in W_\lambda, \mathbb{p}' \in W_{\lambda'} \Rightarrow \langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = 0$ (直交).

(証明) $\mathbb{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ \vdots \\ p'_n \end{pmatrix}$ に対して，$\langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = \mathbb{p}^t\, \mathbb{p}' = 0$ を示せばよい．1×1 行列 (a) に対して，$(a)^t = (a)$ に注意すれば,

$\lambda \mathbb{p}^t \mathbb{p}' = \lambda(\mathbb{p}'^t \mathbb{p})^t = \lambda(\mathbb{p}'^t \mathbb{p}) = \mathbb{p}'^t(\lambda \mathbb{p}) = \mathbb{p}'^t(A\mathbb{p}) = (\mathbb{p}^t A^t \mathbb{p}')^t$
$= \mathbb{p}^t A^t \mathbb{p}' = \mathbb{p}^t A \mathbb{p}' = \mathbb{p}^t(\lambda' \mathbb{p}') = \lambda' \mathbb{p}^t \mathbb{p}'$.
$\therefore\ (\lambda - \lambda')\mathbb{p}^t \mathbb{p}' = 0.\quad \therefore\ \mathbb{p}^t \mathbb{p}' = 0$

定理 7

対称行列 A の固有値 $\lambda \neq \lambda'$, $\mathbb{p} \in W_\lambda, \mathbb{p}' \in W_{\lambda'} \Rightarrow \langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = 0$ (直交).

(証明) $\mathbb{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}' = \begin{pmatrix} p_1' \\ \vdots \\ p_n' \end{pmatrix}$ に対して，$\langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = \mathbb{p}^t\, \mathbb{p}' = 0$ を示せばよい．1×1 行列 (a) に対して，$(a)^t = (a)$ に注意すれば,

$\lambda \mathbb{p}^t \mathbb{p}' = \lambda(\mathbb{p}'^t \mathbb{p})^t = \lambda(\mathbb{p}'^t \mathbb{p}) = \mathbb{p}'^t(\lambda \mathbb{p}) = \mathbb{p}'^t(A\mathbb{p}) = (\mathbb{p}^t A^t \mathbb{p}')^t$

$= \mathbb{p}^t A^t \mathbb{p}' = \mathbb{p}^t A \mathbb{p}' = \mathbb{p}^t(\lambda' \mathbb{p}') = \lambda' \mathbb{p}^t \mathbb{p}'.$

$\therefore\ (\lambda - \lambda')\mathbb{p}^t \mathbb{p}' = 0.\quad \therefore\ \mathbb{p}^t \mathbb{p}' = 0\ (\because\ \lambda \neq \lambda').$ □

定理 7

対称行列 A の固有値 $\lambda \neq \lambda'$, $\mathbb{p} \in W_\lambda, \mathbb{p}' \in W_{\lambda'} \Rightarrow \langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = 0$ (直交).

(証明) $\mathbb{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}' = \begin{pmatrix} p_1' \\ \vdots \\ p_n' \end{pmatrix}$ に対して，$\langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = \mathbb{p}^t\, \mathbb{p}' = 0$ を示せばよい．1×1 行列 (a) に対して，$(a)^t = (a)$ に注意すれば，

$$\lambda \mathbb{p}^t \mathbb{p}' = \lambda(\mathbb{p}'^t \mathbb{p})^t = \lambda(\mathbb{p}'^t \mathbb{p}) = \mathbb{p}'^t(\lambda \mathbb{p}) = \mathbb{p}'^t(A\mathbb{p}) = (\mathbb{p}^t A^t \mathbb{p}')^t$$
$$= \mathbb{p}^t A^t \mathbb{p}' = \mathbb{p}^t A \mathbb{p}' = \mathbb{p}^t(\lambda' \mathbb{p}') = \lambda' \mathbb{p}^t \mathbb{p}'.$$
$$\therefore\ (\lambda - \lambda')\mathbb{p}^t \mathbb{p}' = 0. \quad \therefore\ \mathbb{p}^t \mathbb{p}' = 0\ (\because\ \lambda \neq \lambda'). \qquad \square$$

対称行列 A の直交対角化法

Step 1. A の各固有空間 W_{λ_i} の基底をグラム・シュミットの正規直交化法を用いて，正規直交基底 $\mathbb{p}_{\lambda_i,1}, \ldots, \mathbb{p}_{\lambda_i,k_i}$ $(\dim(W_{\lambda_i}) = k_i)$ をもとめる.

定理 7

対称行列 A の固有値 $\lambda \neq \lambda'$, $\mathbb{p} \in W_\lambda, \mathbb{p}' \in W_{\lambda'} \Rightarrow \langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = 0$ (直交).

(証明) $\mathbb{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}' = \begin{pmatrix} p_1' \\ \vdots \\ p_n' \end{pmatrix}$ に対して，$\langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = \mathbb{p}^t\, \mathbb{p}' = 0$ を示せばよい．1×1 行列 (a) に対して，$(a)^t = (a)$ に注意すれば，

$\lambda \mathbb{p}^t \mathbb{p}' = \lambda(\mathbb{p}'^t \mathbb{p})^t = \lambda(\mathbb{p}'^t \mathbb{p}) = \mathbb{p}'^t(\lambda \mathbb{p}) = \mathbb{p}'^t(A\mathbb{p}) = (\mathbb{p}^t A^t \mathbb{p}')^t$

$= \mathbb{p}^t A^t \mathbb{p}' = \mathbb{p}^t A \mathbb{p}' = \mathbb{p}^t(\lambda' \mathbb{p}') = \lambda' \mathbb{p}^t \mathbb{p}'$.

$\therefore\ (\lambda - \lambda')\mathbb{p}^t \mathbb{p}' = 0$. $\quad\therefore\ \mathbb{p}^t \mathbb{p}' = 0$ $(\because\ \lambda \neq \lambda')$. $\square$

対称行列 A の直交対角化法

Step 1. A の各固有空間 W_{λ_i} の基底をグラム・シュミットの正規直交化法を用いて，正規直交基底 $\mathbb{p}_{\lambda_i,1}, \ldots, \mathbb{p}_{\lambda_i,k_i}$ $(\dim(W_{\lambda_i}) = k_i)$ をもとめる．

Step 2. $P = (\mathbb{p}_{\lambda_1,1} \cdots \mathbb{p}_{\lambda_1,k_1} \cdots)$ とする．(P は直交行列となる)

定理 7

対称行列 A の固有値 $\lambda \neq \lambda'$, $\mathbb{p} \in W_\lambda, \mathbb{p}' \in W_{\lambda'} \Rightarrow \langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = 0$ (直交).

(証明) $\mathbb{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \mathbb{p}' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ \vdots \\ p'_n \end{pmatrix}$ に対して，$\langle \mathbb{p}, \mathbb{p}' \rangle = \mathbb{p}^t\,\mathbb{p}' = 0$ を示せばよい．1×1 行列 (a) に対して，$(a)^t = (a)$ に注意すれば，

$\lambda \mathbb{p}^t \mathbb{p}' = \lambda(\mathbb{p}'^t \mathbb{p})^t = \lambda(\mathbb{p}'^t \mathbb{p}) = \mathbb{p}'^t(\lambda \mathbb{p}) = \mathbb{p}'^t(A\mathbb{p}) = (\mathbb{p}^t A^t \mathbb{p}')^t$

$= \mathbb{p}^t A^t \mathbb{p}' = \mathbb{p}^t A \mathbb{p}' = \mathbb{p}^t(\lambda' \mathbb{p}') = \lambda' \mathbb{p}^t \mathbb{p}'$.

$\therefore\ (\lambda - \lambda')\mathbb{p}^t \mathbb{p}' = 0.\quad \therefore\ \mathbb{p}^t \mathbb{p}' = 0\ (\because\ \lambda \neq \lambda')$. □

対称行列 A の直交対角化法

Step 1. A の各固有空間 W_{λ_i} の基底をグラム・シュミットの正規直交化法を用いて，正規直交基底 $\mathbb{p}_{\lambda_i,1}, \ldots, \mathbb{p}_{\lambda_i,k_i}$ $(\dim(W_{\lambda_i}) = k_i)$ をもとめる．

Step 2. $P = (\mathbb{p}_{\lambda_1,1} \cdots \mathbb{p}_{\lambda_1,k_1} \cdots)$ とする．(P は直交行列となる)

Step 3. $P^{-1}AP$: 対角行列となる．

おまけ：ジョルダン標準形

おまけ：ジョルダン標準形

定義 (ジョルダン細胞) … Jordan cell

次の形の $n \times n$ 行列を ジョルダン細胞 という：

$$J_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

おまけ：ジョルダン標準形

定義 (ジョルダン細胞) ⋯ Jordan cell

次の形の $n \times n$ 行列を <u>ジョルダン細胞</u> という：

$$J_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

定理 (ジョルダン標準形) ⋯ Jordan normal form

A : $n \times n$ 行列．$\exists P$: 可逆行列 s.t.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,n_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_{\lambda_r,n_r} \end{pmatrix}.$$

おまけ：ジョルダン標準形

定義 (ジョルダン細胞) ⋯ Jordan cell

次の形の $n \times n$ 行列を ジョルダン細胞 という：

$$J_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

定理 (ジョルダン標準形) ⋯ Jordan normal form

A : $n \times n$ 行列．$\exists P$: 可逆行列 s.t.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,n_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_{\lambda_r,n_r} \end{pmatrix}.$$

さらに，ジョルダン細胞の並べ方を除いて一意的に定まる．

おまけ：ジョルダン標準形

定義 (ジョルダン細胞)　⋯　Jordan cell

次の形の $n \times n$ 行列を <u>ジョルダン細胞</u> という：

$$J_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

定理 (ジョルダン標準形)　⋯　Jordan normal form

A : $n \times n$ 行列．$\exists P$: 可逆行列 s.t.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,n_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_{\lambda_r,n_r} \end{pmatrix}.$$

さらに，ジョルダン細胞の並べ方を除いて一意的に定まる．

- 対角化可能 $\Leftrightarrow$ ジョルダン標準形のジョルダン細胞が n 個 ($\forall n_i = 1$)
- $A \sim B$ (相似) $\Leftrightarrow$ A と B のジョルダン標準形は一致