

# はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス

[LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。  
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

## 4.2 線形空間

### 注意

教科書では「線型」を使っているが、この授業では「線形」を使う。  
「線型空間」 → 「線形空間」

$V$  : 集合

$n$ 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$   $\rightsquigarrow$   $V$  : 線形空間  
一般化

### 注意

$\exists!$  は「一意的 (ただ一つ) に存在」 ( $\exists 1$  も同様)  
 $\exists \sim \text{s.t.}$   $\dots$  の  $\text{s.t.}$  は  $\text{such that}$  の略で  $\dots$  をみたすような

## 定義 (線形空間 $V$ ) [ $\mathbb{C}$ 上や体 $K$ 上もあるがこの授業では扱わない ]

$V$ : 集合,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \forall k, l \in \mathbb{R}$  が次の 10 個の公理をみたすとき,  $V$  を ( $\mathbb{R}$  上の) 線形空間, 元  $\mathbf{u} \in V$  を ベクトル という.

公理 1.  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ , 和  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$  が定義されている.

2.  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$  (交換法則)

3.  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$  (結合法則)

4.  $\exists! \mathbf{0} \in V$  s.t.  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

5.  $\forall \mathbf{u} \in V \exists! -\mathbf{u} \in V$  s.t.  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$

( $\mathbf{0}$  を ゼロ・ベクトル,  $-\mathbf{u}$  を  $\mathbf{u}$  の 逆元 という)

公理 6.  $\mathbf{u} \in V, k \in \mathbb{R}$ , スカラー倍  $k\mathbf{u} \in V$  が定義されている.

7.  $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$  (分配法則 1)

8.  $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$  (分配法則 2)

9.  $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

10.  $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

## 注意

$\mathbb{R}^n$  は公理 1~10 をみたし線形空間. (ほかにも色々な線形空間がある)

## 例

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$  原点を通る  $\mathbb{R}^3$  内の平面は線形空間. (ベクトル  $(a, b, c)$  と直交する平面  $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0$ )

$\therefore \mathbb{R}^3$  は線形空間であり,  $V \subset \mathbb{R}^3$  より  $V$  は公理 2,3,7,8,9,10 をみたす.  
( $\mathbb{R}^3$  全体で成立)

(公理 1)  $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathfrak{v} = (v_1, v_2, v_3) \in V$

$$\Rightarrow au_1 + bu_2 + cu_3 = 0, av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$$

$$\Rightarrow a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) + c(u_3 + v_3) = 0$$

$$\Rightarrow \mathfrak{u} + \mathfrak{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \in V.$$

(公理 4)  $\mathfrak{0} = (0, 0, 0) \in V.$

(公理 5)  $-\mathfrak{u} = (-u_1, -u_2, -u_3) \in V.$

$$(\because au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \Rightarrow a(-u_1) + b(-u_2) + c(-u_3) = 0)$$

(公理 6)  $k\mathfrak{u} = (ku_1, ku_2, ku_3) \in V.$

$$(\because au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \Rightarrow a(ku_1) + b(ku_2) + c(ku_3) =$$

$$k(au_1 + bu_2 + cu_3) = k \cdot 0 = 0).$$

## 例

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = at, y = bt, z = ct (t \in \mathbb{R})\}$  原点を通る  $\mathbb{R}^3$  内の直線は線形空間.

$\therefore$  省略. 上の例と同様. (各自考えてみる)

## 例

$V = M_{m,n} = \{ \text{実数成分の } m \times n \text{ 行列} \}$  は線形空間.

$\therefore$  和 : 行列の和, ゼロ・ベクトル : 零行列  $\mathbf{O}$ ,

逆元 :  $A$  の逆元は  $-A$ , スカラー倍 : 行列のスカラー倍  $kA$ .

## 例

$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$   $\mathbb{R}$  上の実数値関数全体は線形空間.

$\therefore$  和 :  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ , ゼロ・ベクトル :  $f = 0$ ,

逆元 :  $f$  の逆元は  $-f$ , スカラー倍 :  $(kf)(x) := kf(x)$ .

## 例

$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$  は線形空間でない。

$\because (1, 1) \in V$  だが逆元  $-(1, 1) = (-1, -1) \notin V$ .

## 例

$V = \{0\}$  ゼロ・ベクトルからなる1点集合は線形空間。

例えば,  $V = \{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ .

## 例

$V = \{\text{実数列 } \{a_n\}\}$  実数列全体は線形空間。

$\because a = \{a_n\}, b = \{b_n\}$  に対して,

和:  $a + b := \{a_n + b_n\}$ , ゼロ・ベクトル:  $\{0\} = \{0, 0, 0, \dots\}$ ,

逆元:  $a$  の逆元は  $-a := \{-a_n\}$ , スカラー倍:  $ka := \{ka_n\}$ .

## 例

$V = \mathbb{R}[X] = \{f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}, n \geq 0\}$  実数係数の  
1変数多項式全体は線形空間.

∴ 和：多項式の和  $f + g$ , ゼロ・ベクトル： $0 \in \mathbb{R}$ ,  
逆元： $f$  の逆元は  $-f$ , スカラー倍： $kf \in V$ .

## 例

$V = \mathbb{R}[X]_n = \{f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$   $n$  次以下の実数  
係数の1変数多項式全体は線形空間.

∴ 和：多項式の和  $f + g$ , ゼロ・ベクトル： $0 \in \mathbb{R}$ ,  
逆元： $f$  の逆元は  $-f$ , スカラー倍： $kf \in V$ .

- ▶ 教 pp.161~163 の練習問題 4.2 を各自やってみる

### 定理 3

$V$  : 線形空間,  $\mathbf{u} \in V, k \in \mathbb{R}$ .

(a)  $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .    (b)  $k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ .    (c)  $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$ .

(d)  $k \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow k = 0$  または  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

(証明) (公理 1 から公理 10 のみを用いて示す)

(a)  $0 \cdot \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{u} \stackrel{\text{公理 8}}{=} (0+0) \cdot \mathbf{u} = 0 \cdot \mathbf{u}$ . 公理 5 より  $0 \cdot \mathbf{u}$  の逆元  $-0 \cdot \mathbf{u}$  が存在し, 両辺に足すと  $(0 \cdot \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{u}) + (-0 \cdot \mathbf{u}) = 0 \cdot \mathbf{u} + (-0 \cdot \mathbf{u}) \stackrel{\text{公理 3,5}}{\Rightarrow}$

$0 \cdot \mathbf{u} + (0 \cdot \mathbf{u} + (-0 \cdot \mathbf{u})) = \mathbf{0} \stackrel{\text{公理 5}}{\Rightarrow} 0 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \stackrel{\text{公理 4}}{\Rightarrow} 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

(b)  $k \cdot \mathbf{0} \stackrel{\text{公理 4}}{=} k \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) \stackrel{\text{公理 7}}{=} k \cdot \mathbf{0} + k \cdot \mathbf{0}$ . よって公理 5 より,  $k \cdot \mathbf{0}$  の逆元  $-k \cdot \mathbf{0}$  をとれば (a) と同様. (c)  $\mathbf{u} + (-1) \cdot \mathbf{u} \stackrel{\text{公理 10}}{=} 1 \cdot \mathbf{u} + (-1) \cdot \mathbf{u}$

$\stackrel{\text{公理 8}}{=} (1-1) \cdot \mathbf{u} = 0 \cdot \mathbf{u} \stackrel{\text{公理 9}}{=} \mathbf{0}$ . よって,  $-\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u}$ .

(d) (背理法)  $k \neq 0$  かつ  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  を仮定.  $k \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$  の両辺に  $\frac{1}{k}$  をかけて,

(左辺)  $\frac{1}{k}(k \cdot \mathbf{u}) \stackrel{\text{公理 9}}{=} 1 \cdot \mathbf{u} \stackrel{\text{公理 10}}{=} \mathbf{u}$

(右辺)  $\frac{1}{k} \cdot \mathbf{0} \stackrel{\text{(b)}}{=} \mathbf{0}$ . よって  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  となり矛盾. □