線形代数IIA（第13回・2022/5/23）小テスト

在籍番号		氏名	

[1] **(定義)** V, W を線形空間，$T : V \to W$ を線形写像とする．

$\mathrm{rank}(T) := \dim(\mathrm{Im}(T))$ を T の $\boxed{}$ (1),

$\mathrm{nullity}(T) := \dim(\mathrm{Ker}(T))$ を T の $\boxed{}$ (2) という．

ちなみに，Null は $\boxed{}$ (3) では，0 という意味がある．

たとえば，$T = T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbb{x} \mapsto A\mathbb{x}$ (A は $m \times n$ 行列) に対して，

$\mathrm{rank}(T_A) = \dim(\mathrm{Im}(T_A)) \underset{\text{定理 14}}{=} \dim(C(A)) = \boxed{}$ (4) ,

$\mathrm{nullity}(T_A) = \dim(\mathrm{Ker}(T_A)) = \dim(\{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \mathbb{o}\})$.

すなわち，連立 1 次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ の $\boxed{}$ (5) となる．

[2] **(定理 3：次元定理)** V, W を線形空間，$T : V \to W$：線形写像，$\dim(V) = n$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(T) + \mathrm{nullity}(T) = \boxed{}$ (1).

特に，$m \times n$ 行列 A に対して，

連立 1 次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ の解空間の次元は $\boxed{}$ (2) がわかる．

[3] $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ に対して，$\mathrm{rank}(A) = \boxed{}$ (1) である．よって，次元定理と

その系から連立 1 次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ の解空間 W の次元は，$\dim W = \boxed{}$ (2) とわかる．

[4] $T : V \to W$：線形写像，$B = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$: V の基底，$B' = \{\mathbb{w}_1, \ldots, \mathbb{w}_m\}$: W の基底とする．

$[T(\mathbb{x})]_{B'} = A\,[\mathbb{x}]_B$ をみたす $m \times n$ 行列 $A = ([T(\mathbb{v}_1)]_{B'} \cdots [T(\mathbb{v}_n)]_{B'})$ を

基底 B, B' に関する T の行列という．

特に，T が 1 次変換 $(V = W)$ で $B = B'$ のとき，(単に) $\boxed{}$ という．