線形代数IIA（第6回・2022/4/25）小テスト

在籍番号		氏名	

[1] **(定理7)** V を線形空間，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in V$ を V の基底とする．

このとき，V の $\boxed{}$ **個以上**のベクトルは1次従属となる

(ただし，答えの候補の内最小のものを答えること)．

対偶を取れば，V のベクトルが1次独立ならば，その個数は n **個以下**である．

これを用いると，次の定理が従う：

(定理8) 有限次元の線形空間の**基底は，常に一定の個数**のベクトルからなる．

[2] **(定義)** V を線形空間, $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in V$ を V の**基底**とする．

このとき，(1) V の**次元** (dimension) は $\boxed{}$ であるといい，$\dim V$ とかく．

(2) 線形空間 $\{\mathbb{o}\}$ の次元は $\boxed{}$ と定める．

例えば，(3) $\dim \mathbb{R}^n = \boxed{}$, (4) $\dim \mathbb{R}[X]_n = \boxed{}$,

(5) $\dim \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \boxed{}$, (6) $\dim \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & a \end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\} = \boxed{}$.

但し，$\mathbb{R}[X]_n$ は n **次以下**の実数係数の多項式全体のなす線形空間とする．

[3] 連立方程式

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

の解空間を W とすれば，$\dim W = \boxed{}$ となる．

[4] **(定義)** $m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ に対して, j 列からなるベクトル $\mathbf{c}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ を列ベクトル,

i 行からなるベクトル $\mathbf{r}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ を行ベクトル，

(1) $R(A) = \mathrm{Span}(\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_m) \subset \mathbb{R}^n$ を A の $\boxed{}$,

(2) $C(A) = \mathrm{Span}(\mathbf{c}_1, \ldots \mathbf{c}_n) \subset \mathbb{R}^m$ を A の $\boxed{}$ という