はじめに　(数学基礎 B1)

数学基礎 B　＝　線形代数

教科書「要点明解　線形数学　三訂版」培風館

(第 1 章　ベクトル)
- 第 2 章　行列
- 第 3 章　連立 1 次方程式

(第 4 章　行列式)
(第 5 章　行列の対角化)

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

2.2 行列の積

2.2 行列の積

定義 (行列の積)

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ に対して，<u>積 AB</u> を

$AB := \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$ と定める．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，<u>積 $A\mathbb{x}$</u> を

$A\mathbb{x} := \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ と定める．

2.2 行列の積

定義 (行列の積)

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ に対して，積 AB を

$AB := \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$ と定める．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，積 $A\mathbb{x}$ を

$A\mathbb{x} := \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$ と定める．

定義 (行列の積)

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ に対して，<u>積 AB</u> を

$$AB := \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$ と定める．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，<u>積 $A\mathbb{x}$</u> を

$$A\mathbb{x} := \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$ と定める．

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

2.2 行列の積

定義 (行列の積)

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ に対して，積 AB を

$AB := \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$ と定める．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，積 $A\mathbb{x}$ を

$A\mathbb{x} := \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ と定める．

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & 6-5 \\ 7+20 & 21-25 \end{pmatrix}$$

2.2 行列の積

定義 (行列の積)

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ に対して，<u>積 AB</u> を

$AB := \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$ と定める．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，<u>積 $A\mathbb{x}$</u> を

$A\mathbb{x} := \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ と定める．

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & 6-5 \\ 7+20 & 21-25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 27 & -4 \end{pmatrix}.$$

注意

$$\alpha : \begin{cases} x \mapsto u = ax + by \\ y \mapsto v = cx + dy \end{cases} \qquad \beta : \begin{cases} z \mapsto x = ez + fw \\ w \mapsto y = gz + hw \end{cases} \qquad \cdots (1)$$

とすると，写像の合成

$$\alpha \circ \beta : \begin{cases} z \overset{\beta}{\mapsto} x \overset{\alpha}{\mapsto} u = ax + by = (ae + bg)z + (af + bh)w \\ w \overset{\beta}{\mapsto} y \overset{\alpha}{\mapsto} v = cx + dy = (ce + dg)z + (cf + dh)w \end{cases} \qquad \cdots (2)$$

と計算できる．よって (1), (2) は

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

とかける．

- より一般の場合

- より一般の場合

定義 (行列の積)

$A = (a_{ij}) : m \times n$ 行列，$B = (b_{jk}) : n \times l$ 行列.

- より一般の場合

定義 (行列の積)

$A = (a_{ij})$: $m \times n$ 行列, $B = (b_{jk})$: $n \times l$ 行列.

積 AB を

- より一般の場合

定義 (行列の積)

$A = (a_{ij}) : m \times n$ 行列, $B = (b_{jk}) : n \times l$ 行列.

積 AB を

$AB := (c_{ik})$ 但し

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

$(1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq l)$ と定義する.

- より一般の場合

定義 (行列の積)

$A = (a_{ij})$: $m \times n$ 行列, $B = (b_{jk})$: $n \times l$ 行列.

積 AB を

$AB := (c_{ik})$ 但し

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

$(1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq l)$ と定義する.

注意

積 AB の (i,k) 成分が $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$.

- より一般の場合

定義 (行列の積)

$A = (a_{ij})$: $m \times n$ 行列， $B = (b_{jk})$: $n \times l$ 行列.

積 AB を

$AB := (c_{ik})$ 但し

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

$(1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq l)$ と定義する.

注意

積 AB の (i,k) 成分が $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$.

積 AB は $m \times l$ 行列となる.

例

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

例

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+6-15 & -2+8-18 \\ -4+15-30 & -8+20-36 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+6-15 & -2+8-18 \\ -4+15-30 & -8+20-36 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -10 & -12 \\ -19 & -24 \end{pmatrix}.$$

例

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+6-15 & -2+8-18 \\ -4+15-30 & -8+20-36 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -10 & -12 \\ -19 & -24 \end{pmatrix}.$$

例

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+6-15 & -2+8-18 \\ -4+15-30 & -8+20-36 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -10 & -12 \\ -19 & -24 \end{pmatrix}.$$

例

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

例

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-1+6-15} & -2+8-18 \\ -4+15-30 & -8+20-36 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{-10} & -12 \\ -19 & -24 \end{pmatrix}.$$

例

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{ad-bc} & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc) \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例

$A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列 $\Rightarrow AB : m \times l$ 行列.

例

$A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列 $\Rightarrow AB : m \times l$ 行列.

このとき，$B = (\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_l)$, $\mathbb{b}_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$ $(1 \leq i \leq l)$ とすれば,

例

A : $m \times n$ 行列，B : $n \times l$ 行列 $\Rightarrow$ AB : $m \times l$ 行列.

このとき，$B = (\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_l)$, $\mathbb{b}_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$ $(1 \leq i \leq l)$ とすれば,

$$AB = A(\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_l) = (A\mathbb{b}_1, \ldots, A\mathbb{b}_l).$$

例

$A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列 $\Rightarrow AB : m \times l$ 行列.

このとき，$B = (\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_l)$, $\mathbb{b}_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$ $(1 \leq i \leq l)$ とすれば,

$$AB = A(\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_l) = (A\mathbb{b}_1, \ldots, A\mathbb{b}_l).$$

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = (\ \mathbb{b}_1\ ,\ \mathbb{b}_2\ ).$$

例

$A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列 $\Rightarrow AB : m \times l$ 行列.

このとき，$B = (\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_l)$, $\mathbb{b}_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$ $(1 \leq i \leq l)$ とすれば，

$$AB = A(\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_l) = (A\mathbb{b}_1, \ldots, A\mathbb{b}_l).$$

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = (\ \mathbb{b}_1\ ,\ \mathbb{b}_2\ ).$$

$$AB = A(\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2) = (\ A\mathbb{b}_1\ ,\ A\mathbb{b}_2\ ) = \begin{pmatrix} -10 & -12 \\ -19 & -24 \end{pmatrix}.$$

定理 2.3

(1) $A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列，$k :$ 実数とすると，

定理 2.3

(1) $A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列，k : 実数とすると，

$$A(kB) = (kA)B = k(AB).$$

定理 2.3

(1) $A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列，k : 実数とすると，

$$A(kB) = (kA)B = k(AB).$$

(2) $A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列，$C : l \times r$ 行列とすると，

定理 2.3

(1) $A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列，k : 実数とすると，

$$A(kB) = (kA)B = k(AB).$$

(2) $A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列，$C : l \times r$ 行列とすると，

$$(AB)C = A(BC)$$

定理 2.3

(1) $A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列，k : 実数とすると，

$$A(kB) = (kA)B = k(AB).$$

(2) $A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列，$C : l \times r$ 行列とすると，

$$(AB)C = A(BC)$$

(3) $A : m \times n$ 行列，$B, C : n \times l$ 行列とすると，

定理 2.3

(1) $A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列，k : 実数とすると，

$$A(kB) = (kA)B = k(AB).$$

(2) $A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列，$C : l \times r$ 行列とすると，

$$(AB)C = A(BC)$$

(3) $A : m \times n$ 行列，$B, C : n \times l$ 行列とすると，

$$A(B + C) = AB + AC$$

定理 2.3

(1) $A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列，k : 実数とすると，

$$A(kB) = (kA)B = k(AB).$$

(2) $A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列，$C : l \times r$ 行列とすると，

$$(AB)C = A(BC)$$

(3) $A : m \times n$ 行列，$B, C : n \times l$ 行列とすると，

$$A(B + C) = AB + AC$$

(4) $A, B : m \times n$ 行列，$C : n \times l$ 行列とすると，

定理 2.3

(1) $A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列，k : 実数とすると，

$$A(kB) = (kA)B = k(AB).$$

(2) $A : m \times n$ 行列，$B : n \times l$ 行列，$C : l \times r$ 行列とすると，

$$(AB)C = A(BC)$$

(3) $A : m \times n$ 行列，$B, C : n \times l$ 行列とすると，

$$A(B + C) = AB + AC$$

(4) $A, B : m \times n$ 行列，$C : n \times l$ 行列とすると，

$$(A + B)C = AC + BC$$

注意

一般には，$AB \neq BA$ である（非可換という）
($AB = BA$ とは限らない，$AB = BA$ のときもある)

注意

一般には，$AB \neq BA$ である（非可換という）
($AB = BA$ とは限らない，$AB = BA$ のときもある)

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

注意

一般には，$AB \neq BA$ である（非可換という）
($AB = BA$ とは限らない，$AB = BA$ のときもある)

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = BA,$$

注意

一般には，$AB \neq BA$ である（非可換という）
($AB = BA$ とは限らない，$AB = BA$ のときもある)

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = BA,\quad AC = CA$$

注意

一般には，$AB \neq BA$ である（非可換という）
($AB = BA$ とは限らない，$AB = BA$ のときもある)

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$AB = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = BA,\ \ AC = CA = A.$

定義 (n 次単位行列)

n 次正方行列

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{対角成分が } 1 \text{ で他は } 0)$$

を <u>n 次単位行列</u> という.

定義 (n 次単位行列)

n 次正方行列

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{対角成分が } 1 \text{ で他は } 0)$$

を <u>n 次単位行列</u> という.

例

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意

n 次単位行列 E_n はかけても相手を変えない.

注意

n 次単位行列 E_n はかけても相手を変えない.

つまり，$m \times n$ 行列 A に対して，$AE_n = E_m A = A$.

注意

n 次単位行列 E_n はかけても相手を変えない.

つまり，$m \times n$ 行列 A に対して，$AE_n = E_m A = A$.

数の世界での単位元 “1” にあたる：$a \times 1 = 1 \times a = a$.