はじめに　(数学基礎 B1)

数学基礎 B　＝　線形代数

教科書「要点明解　線形数学　三訂版」培風館

(第 1 章　ベクトル)
- 第 2 章　行列
- 第 3 章　連立 1 次方程式

(第 4 章　行列式)
(第 5 章　行列の対角化)

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと.
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

連立1次方程式を解く.

$$(\mathbf{3}) = (1) - 2 \times (2)$$

$$\begin{cases} 4x + 5y &= 3 \cdots (1) \\ 2x + 3y &= 1 \cdots (2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -y &= 1 \cdots (\mathbf{3}) \\ 2x + 3y &= 1 \cdots (2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y &= 1 \cdots (2) \\ -y &= 1 \cdots (\mathbf{3}) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 2x &= 4 \cdots (\mathbf{4}) \\ -y &= 1 \cdots (\mathbf{3}) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x &= 4 \cdots (\mathbf{4}) \\ y &= -1 \cdots (5) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x &= 2 \cdots (6) \\ y &= -1 \cdots (5) \end{cases}$$

$$(\mathbf{4}) = (2) + 3 \times (\mathbf{3}) \qquad (5) = (-1) \times (\mathbf{3}) \qquad (6) = \frac{1}{2} \times (\mathbf{4})$$

連立1次方程式を解く.

$$(\mathbf{3}) = (1) - 2 \times (2)$$

$$\begin{cases} 4x+5y = 3 \cdots (1) \\ 2x+3y = 1 \cdots (2) \end{cases} \xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \begin{cases} -y = 1 \cdots (\mathbf{3}) \\ 2x+3y = 1 \cdots (2) \end{cases} \xrightarrow{\boxed{\text{I}}} \begin{cases} 2x+3y = 1 \cdots (2) \\ -y = 1 \cdots (\mathbf{3}) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \begin{cases} 2x = 4 \cdots (\mathbf{4}) \\ -y = 1 \cdots (\mathbf{3}) \end{cases} \xrightarrow{\boxed{\text{II}}} \begin{cases} 2x = 4 \cdots (\mathbf{4}) \\ y = -1 \cdots (5) \end{cases} \xrightarrow{\boxed{\text{II}}} \begin{cases} x = 2 \cdots (6) \\ y = -1 \cdots (5) \end{cases}$$

$$(\mathbf{4}) = (2) + 3 \times (\mathbf{3}) \qquad (5) = (-1) \times (\mathbf{3}) \qquad (6) = \frac{1}{2} \times (\mathbf{4})$$

I. 2つの行を交換

II. ある行を k 倍 $(k \neq 0)$

III. ある行の k 倍を他の行に加える

(行) 基本変形　(前回)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\boxed{\text{I}}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & \mathbf{0} & 4 \\ \mathbf{0} & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\boxed{\text{II}}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & \mathbf{0} & 4 \\ \mathbf{0} & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\boxed{\text{II}}} \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right)$$

注意

連立 1 次方程式を解く

$\overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow}$

(行) 基本変形 I, II, III をくり返して $\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & a \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & b \end{array}\right)$ の形にする.

すなわち，左側を単位行列 $E_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ にする.

このとき，連立 1 次方程式の解 $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ がえられる.

例

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 9 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + 2y + z &= 10 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) \downarrow\times(-2) \xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) \downarrow\times(-3) \xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \end{array}\right) \times\left(-\tfrac{1}{3}\right)$$

$$\xrightarrow{\boxed{\text{II}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \end{array}\right) \downarrow\times 1 \xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right) \uparrow\times(-1) \xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right) \times\left(-\tfrac{1}{4}\right)$$

$$\xrightarrow{\boxed{\text{II}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \uparrow\times(-1) \xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \uparrow\times(-1) \xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \therefore \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{cases}$$

注意

行基本変形 I, II, III は1つずつ行うこと … コツコツやりましょう
例えば，1行目を3行目に加え，同時に3行目を1行目に加えると，
1行目も3行目も同じになります．が，間違っています．

注意

行基本変形を行うこと．　列ではダメ．

注意

行基本変形 $\longrightarrow$ は逆に戻ることもできる．$(\longleftrightarrow)$
ここから $\longrightarrow$ の最初と最後の解は完全に一致していることがわかる．
行ったり来たり $(\longleftrightarrow)$ できることが重要．
片向き $\longleftarrow, \longrightarrow$ だと全ての解をもれなくぴったり求めたとは言えない．

- 左側を必ず単位行列 E_n にできるわけではない．
  これは，解が1つ (1組) のときにおこる．
  しかし，解がないときも，解が無数にあるときもある．一般には …

3.2 掃き出し法

定理

全ての $m \times n$ 行列は (行) 基本変形を何回か行って次の形に変形できる：

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & \text{第}\,n_1\,\text{列} & & \cdots & & \text{第}\,n_2\,\text{列} & & \cdots & & \text{第}\,n_r\,\text{列} & & &
\end{array} \\
\begin{array}{c}
\text{第 1 行} \\
\text{第 2 行} \\
\vdots \\
\\
\text{第 } r \text{ 行} \\
\vdots \\
\\
\\
\end{array}
&
\left(
\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & \ast & \cdots & \ast & 0 & & & & 0 & & & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & & & & 0 & & & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \bigstar & & \vdots & & \bigstar & \\
\vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & & & 0 & & \text{初 } \mathbf{1} & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & & & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}
\right)
\end{array}
$$

左より見てゆく $\longrightarrow$

注意

(1) 各行を左から見ていくと，0 でない最初の数は 1.
この 1 を**初 1 (はついち)** という.
(2) 上の行の初 1 は下の行の初 1 より左にある.
つまり，階段になっている.
(3) 初 1 の上下は全て 0.

この (1), (2), (3) をみたす行列を <u>ガウス行列</u> という.