はじめに　(数学基礎 B1)

$\boxed{\text{数学基礎 B} \quad = \quad \text{線形代数}}$

教科書「要点明解　線形数学　三訂版」培風館

(第 1 章　ベクトル)
- 第 2 章　行列
- 第 3 章　連立 1 次方程式

(第 4 章　行列式)
(第 5 章　行列の対角化)

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと.
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 ⟶ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

3.3 連立１次方程式

復習 より一般には，

連立１次方程式
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \cdots(1)$$

を解く必要がでてくる．(1) は，行列をもちいて

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ に対して，

$$\boxed{A\mathbb{x} = \mathbb{b}}$$

と表せる．行列 A を連立１次方程式 (1) の 係数行列，A の最後の列に $\mathbb{b}$ を付け加えた $m \times (n+1)$ 行列 $\overline{A} = (A \mid \mathbb{b})$ を 拡大係数行列 という．

拡大係数行列 $\overline{A} = (A \mid \mathbb{b})$ に行基本変形を何回か行って

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & \begin{array}{c}\text{第}\\ n_1\\ \text{列}\end{array} & & \cdots & & \begin{array}{c}\text{第}\\ n_2\\ \text{列}\end{array} & & \cdots & & \begin{array}{c}\text{第}\\ n_r\\ \text{列}\end{array} & & \cdots & & \begin{array}{c}\text{第}\\ n+1\\ \text{列}\end{array}
\end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & * & \cdots & * & 0 & & & & 0 & & & & d_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & & & & 0 & & & & d_2 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \bigstar & & \vdots & & \bigstar & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & & & 0 & & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & & & & d_r \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
\vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_m
\end{array}\right)
\end{array}
$$

とできる．(左側の A をガウス行列に変形した)

ここで $x_{n_1} \to y_1, x_{n_2} \to y_2, \ldots, x_{n_r} \to y_r$
それ以外の x_j $(j \neq n_1, \ldots, n_r)$ は順に $y_{r+1}, \ldots, y_n$ とする．

これにより，次の連立 1 次方程式をえる：

$$
\begin{cases}
y_1 & & & + & c_{1\,r+1}y_{r+1} & + & \cdots & + & c_{1n}y_n & = & d_1 \\
& y_2 & & + & c_{2\,r+1}y_{r+1} & + & \cdots & + & c_{2n}y_n & = & d_2 \\
& & \ddots & & & & & & & \vdots & \\
& & y_r & + & c_{r\,r+1}y_{r+1} & + & \cdots & + & c_{rn}y_n & = & d_r \\
& & & & & & & & 0 & = & d_{r+1} \\
& & & & & & & & & \vdots & \\
& & & & & & & & 0 & = & d_m
\end{cases}
$$

$(d_{r+1}, \ldots, d_m) \neq (0, \ldots, 0)$ のとき，解は存在しない.

$(d_{r+1}, \ldots, d_m) = (0, \ldots, 0)$ のとき，

$y_{r+1} \to t_{r+1}, \ldots, y_n \to t_n$ (t_i は任意定数) とおくと解をえる：

$$
\begin{cases}
y_1 & = d_1 & & & - & c_{1\,r+1}t_{r+1} & - & \cdots & - & c_{1n}t_n \\
y_2 & = & d_2 & & - & c_{2\,r+1}t_{r+1} & - & \cdots & - & c_{2n}t_n \\
& & \ddots & & & & & & & \\
y_r & = & & d_r & - & c_{r\,r+1}t_{r+1} & - & \cdots & - & c_{rn}t_n \\
y_{r+1} & = & & & & t_{r+1} & & & & \\
\vdots & & & & & & & \ddots & & \\
y_n & = & & & & & & & & t_n
\end{cases}
$$

よって，連立 1 次方程式 (1) が解をもつ $\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\overline{A})$.

定理 3.1

連立 1 次方程式 (1) が解をもつ $\Longleftrightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\overline{A})$.

例

文字 a を含む連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 3z = a \end{cases}$$ を解く． $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & a \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & a \end{array}\right)\downarrow\times(-2) \xrightarrow{\boxed{\mathrm{III}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -18 \\ 3 & 0 & 3 & a \end{array}\right)\downarrow\times(-3) \xrightarrow{\boxed{\mathrm{III}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -18 \\ 0 & -3 & -3 & a-27 \end{array}\right)\times\left(-\tfrac{1}{3}\right)$$

$$\xrightarrow{\boxed{\mathrm{II}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & a-27 \end{array}\right)\downarrow\times 3 \xrightarrow{\boxed{\mathrm{III}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & a-9 \end{array}\right)\uparrow\times(-1) \xrightarrow{\boxed{\mathrm{III}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & a-9 \end{array}\right)$$

$\therefore a \neq 9$ のとき，解なし． $a = 9$ のとき， $\begin{cases} x + z = 3 \\ y + z = 6 \end{cases}$ より，

解は $x = 3 - t,\ y = 6 - t,\ z = t$ （t は任意の実数）.

応用　(A^{-1} を求める)

- 行列 A の逆行列 A^{-1} を求める！

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad A^{-1} = \quad ? \quad ? \quad ?$$

基本ベクトル $\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して，

$A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbb{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を考える．それぞれ解 $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbb{b}_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{pmatrix}$

をもったとすると，$A \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \mathbb{e}_1$，$A \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \mathbb{e}_2$，$A \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \mathbb{e}_3$.

これをまとめてかくと，$A \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.

つまり，A の逆行列 $A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ がえられた．

$$A\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbb{e}_i$$ $(i=1,2,3)$ を 3 つ同時に解く．それには，

$$\left(\begin{array}{c|ccc} A & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ を (行) 基本変形して，$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

とすれば，解 $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbb{b}_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{pmatrix}$ $(i=1,2,3)$ が同時にえられる．

定理 3.2

A : n 次正方行列．A が正則のとき，(行) 基本変形によって
$(A \mid E) \to \cdots \to \cdots \to (E \mid B)$ (但し，$E = E_n$ は n 次単位行列)
とすれば，$B = A^{-1}$ として行列 A の逆行列 A^{-1} が求まる．

注意

A が正則 $\Rightarrow$ $(A \mid E) \to \cdots \to \cdots \to (E \mid B)$ とできる．
すなわち，左側を単位行列 E にできない $\Rightarrow A$ は正則でない．

- 最初の問題に戻ると $\cdots$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad A^{-1} = \quad ? \quad ? \quad ?$$

(行) 基本変形を行うと

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \quad A \quad & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \to \cdots \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \quad B \quad \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right)$$ として,

(行基本変形を各自行う．教 p.65 も参考に)

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$ をえる.

- **検算が必要 !!! (特に試験時)**

それには $\cdots$ $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ **を実際に計算して確かめる.**