

# はじめに (数学基礎 B2)

数学基礎 B = 線形代数

教科書 「要点明解 線形数学」 培風館

(第1章 ベクトル)

(第2章 行列)

(第3章 連立1次方程式)

▶ 第4章 行列式

▶ 第5章 行列の対角化

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス

LINK

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。  
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

## 第4章 行列式

連立1次方程式  $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$  を考える.

## 第4章 行列式

連立1次方程式  $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$  を考える.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ より,}$$

## 第4章 行列式

連立1次方程式  $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$  を考える.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ より, } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ が正則}$$

## 第4章 行列式

連立1次方程式  $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$  を考える.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$  より,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が正則

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

## 第4章 行列式

連立1次方程式  $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$  を考える.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ より, } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ が正則}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

## 第4章 行列式

連立1次方程式  $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$  を考える.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ より, } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ が正則}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

$$\therefore x = \frac{de - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{-ce + af}{ad - bc}.$$

## 第4章 行列式

連立1次方程式  $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$  を考える.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$  より,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が正則

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$

$\therefore x = \frac{de - bf}{ad - bc}, y = \frac{-ce + af}{ad - bc}.$

$ad - bc$  を  $A$  の 行列式 という.



## 第4章 行列式

連立1次方程式  $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$  を考える.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ より, } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ が正則}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

$$\therefore x = \frac{de - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{-ce + af}{ad - bc}.$$

$ad - bc$  を  $A$  の 行列式 という.

▶ 以上を  $A : n \times n$  行列のときに考える !!

## 4.1 行列式の定義

## 4.1 行列式の定義

$n$  次正方行列  $A$  の行列式を  $|A|$ ,  $\det(A)$  とかき,

## 4.1 行列式の定義

$n$  次正方行列  $A$  の行列式を  $|A|$ ,  $\det(A)$  とかき, 以下で定義する:

## 4.1 行列式の定義

$n$  次正方行列  $A$  の行列式を  $|A|$ ,  $\det(A)$  とかき, 以下で定義する:

▶  $n = 1$   $A = (a_{11})$   
 $|A| := |a_{11}| = a_{11}.$

## 4.1 行列式の定義

$n$  次正方行列  $A$  の行列式を  $|A|$ ,  $\det(A)$  とかき, 以下で定義する:

▶  $n = 1$   $A = (a_{11})$

$$|A| := |a_{11}| = a_{11}.$$

$$\cdots |A| = |(a_{11})| \text{ を略して } |a_{11}| \text{ とかく}$$

## 4.1 行列式の定義

$n$  次正方行列  $A$  の行列式を  $|A|$ ,  $\det(A)$  とかき、以下で定義する：

▶  $n = 1$   $A = (a_{11})$

$$|A| := |a_{11}| = a_{11}.$$

…  $|A| = |(a_{11})|$  を略して  $|a_{11}|$  とかく

▶  $n = 2$   $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

## 4.1 行列式の定義

$n$  次正方行列  $A$  の行列式を  $|A|$ ,  $\det(A)$  とかき、以下で定義する：

▶  $n = 1$   $A = (a_{11})$

$$|A| := |a_{11}| = a_{11}.$$

…  $|A| = |(a_{11})|$  を略して  $|a_{11}|$  とかく

▶  $n = 2$   $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$|A| := a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$



## 4.1 行列式の定義

$n$  次正方行列  $A$  の行列式を  $|A|$ ,  $\det(A)$  とかき, 以下で定義する:

- ▶  $n = 1$   $A = (a_{11})$   
 $|A| := |a_{11}| = a_{11}$ .       $\cdots |A| = |(a_{11})|$  を略して  $|a_{11}|$  とかく
- ▶  $n = 2$   $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$   
 $|A| := a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .
- ▶  $n = 3$   $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

## 4.1 行列式の定義

$n$  次正方行列  $A$  の行列式を  $|A|$ ,  $\det(A)$  とかき, 以下で定義する:

▶  $n = 1$   $A = (a_{11})$   
 $|A| := |a_{11}| = a_{11}. \quad \dots \quad |A| = |(a_{11})|$  を略して  $|a_{11}|$  とかく

▶  $n = 2$   $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$   
 $|A| := a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

▶  $n = 3$   $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$   
 $|A| := a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$

## 4.1 行列式の定義

$n$  次正方行列  $A$  の行列式を  $|A|$ ,  $\det(A)$  とかき, 以下で定義する:

▶  $n = 1$   $A = (a_{11})$   
 $|A| := |a_{11}| = a_{11}. \quad \dots \quad |A| = |(a_{11})|$  を略して  $|a_{11}|$  とかく

▶  $n = 2$   $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$   
 $|A| := a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

▶  $n = 3$   $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$   
 $|A| := a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$

### 注意

$n = 3$  のとき,

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ の行列式 } |A| \text{ は,}$$

## 例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$  の行列式  $|A|$  は,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

## 例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$  の行列式  $|A|$  は,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

## 例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$  の行列式  $|A|$  は,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-6) - 1 \cdot 0 - 2 \cdot 18$$

## 例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$  の行列式  $|A|$  は,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-6) - 1 \cdot 0 - 2 \cdot 18 = -42.$$



▶  $n \geq 2$  (一般の場合)

$$|A| := a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| - a_{14}|A_{14}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}|A_{1n}|.$$

但し,

$$A_{1i} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{///} & \cancel{a_{1,i+1}} & \cancel{a_{1i}} & \cancel{a_{1,i+1}} & \cancel{///} & \cancel{a_{1n}} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & \cancel{a_{2i}} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \cancel{///} & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & \cancel{a_{ni}} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

( $A_{1i}$  は  $A$  から第 1 行と第  $i$  列を取り除いた  $(n-1) \times (n-1)$  行列)

# 例

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right|$$

## 例

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

## 例

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
 = -2 \cdot \left( 0 - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) - (-1) \cdot \left( 0 - 0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

## 例

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
 & = -2 \cdot \left( 0 - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) - (-1) \cdot \left( 0 - 0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\
 & = -2 \cdot \left( -3 \cdot (4 - 0) + 2 \cdot (3 - 0) \right) - (-1) \cdot \left( +3 \cdot (2 - 0) \right)
 \end{aligned}$$

## 例

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
 & = -2 \cdot \left( 0 - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) - (-1) \cdot \left( 0 - 0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\
 & = -2 \cdot \left( -3 \cdot (4 - 0) + 2 \cdot (3 - 0) \right) - (-1) \cdot \left( +3 \cdot (2 - 0) \right) \\
 & = -2 \cdot \left( -12 + 6 \right) - (-1) \cdot \left( 6 \right)
 \end{aligned}$$

## 例

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
 & = -2 \cdot \left( 0 - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) - (-1) \cdot \left( 0 - 0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\
 & = -2 \cdot \left( -3 \cdot (4 - 0) + 2 \cdot (3 - 0) \right) - (-1) \cdot \left( +3 \cdot (2 - 0) \right) \\
 & = -2 \cdot \left( -12 + 6 \right) - (-1) \cdot \left( 6 \right) = 12 + 6 = 18.
 \end{aligned}$$

## 例

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot \left( 0 - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) - (-1) \cdot \left( 0 - 0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= -2 \cdot \left( -3 \cdot (4 - 0) + 2 \cdot (3 - 0) \right) - (-1) \cdot \left( +3 \cdot (2 - 0) \right) \\ &= -2 \cdot \left( -12 + 6 \right) - (-1) \cdot \left( 6 \right) = 12 + 6 = 18. \end{aligned}$$

## 注意

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  は行列.



## 例

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot \left( 0 - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) - (-1) \cdot \left( 0 - 0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= -2 \cdot \left( -3 \cdot (4 - 0) + 2 \cdot (3 - 0) \right) - (-1) \cdot \left( +3 \cdot (2 - 0) \right) \\ &= -2 \cdot \left( -12 + 6 \right) - (-1) \cdot \left( 6 \right) = 12 + 6 = 18. \end{aligned}$$

## 注意

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  は行列. (行列式)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$  は数 (整数).

## 例

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot \left( 0 - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) - (-1) \cdot \left( 0 - 0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= -2 \cdot \left( -3 \cdot (4 - 0) + 2 \cdot (3 - 0) \right) - (-1) \cdot \left( +3 \cdot (2 - 0) \right) \\ &= -2 \cdot \left( -12 + 6 \right) - (-1) \cdot \left( 6 \right) = 12 + 6 = 18. \end{aligned}$$

## 注意

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  は行列. (行列式)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$  は数 (整数). … 区別する

## 4.2 行列式の計算法

### 定理 4.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

## 4.2 行列式の計算法

### 定理 4.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

### 注意

これをくり返せば,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

## 定理 4.2

$A : n$  次正方行列,  $A^T : A$  の転置行列  $\Rightarrow |A^T| = |A|$ .

## 定理 4.2

$A$  :  $n$  次正方行列,  $A^T$  :  $A$  の転置行列  $\Rightarrow |A^T| = |A|$ .

## 例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A^T| = ad - bc = |A|.$$

## 定理 4.2

$A : n$  次正方行列,  $A^T : A$  の転置行列  $\Rightarrow |A^T| = |A|$ .

### 例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A^T| = ad - bc = |A|.$$

## 定理 4.3 (← 定理 4.1 + 定理 4.2)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

## 定理 4.4

$A$  の 2 つの行を入れかえた行列  $A'$  に対して,  $|A'| = -|A|$ .



## 定理 4.4

$A$  の 2 つの行を入れかえた行列  $A'$  に対して,  $|A'| = -|A|$ .

## 例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow |A'| = cb - da = -(ad - bc) = -|A|.$$

## 定理 4.4

$A$  の 2 つの行を入れかえた行列  $A'$  に対して,  $|A'| = -|A|$ .

## 例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow |A'| = cb - da = -(ad - bc) = -|A|.$$

## 定理 4.5

$A = A' \Rightarrow |A| = 0$ .

## 定理 4.4

$A$  の 2 つの行を入れかえた行列  $A'$  に対して,  $|A'| = -|A|$ .

## 例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow |A'| = cb - da = -(ad - bc) = -|A|.$$

## 定理 4.5

$A = A' \Rightarrow |A| = 0$ . ( $A$  の 2 つの行が等しい  $\Rightarrow |A| = 0$ .)

## 定理 4.4

$A$  の 2 つの行を入れかえた行列  $A'$  に対して,  $|A'| = -|A|$ .

## 例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow |A'| = cb - da = -(ad - bc) = -|A|.$$

## 定理 4.5

$A = A' \Rightarrow |A| = 0$ . ( $A$  の 2 つの行が等しい  $\Rightarrow |A| = 0$ .)

$$\therefore |A| = |A'| \stackrel{\text{定理 4.4}}{=} -|A|.$$

## 定理 4.4

$A$  の 2 つの行を入れかえた行列  $A'$  に対して,  $|A'| = -|A|$ .

## 例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow |A'| = cb - da = -(ad - bc) = -|A|.$$

## 定理 4.5

$A = A' \Rightarrow |A| = 0$ . ( $A$  の 2 つの行が等しい  $\Rightarrow |A| = 0$ .)

$\therefore |A| = |A'| \stackrel{\text{定理 4.4}}{=} -|A|$ . よって,  $2|A| = 0$  より  $|A| = 0$ .