はじめに　(数学基礎 B2)

$\boxed{\text{数学基礎 B} \quad = \quad \text{線形代数}}$

教科書　「要点明解 線形数学」培風館

- (第 1 章　ベクトル)
- (第 2 章　行列)
- (第 3 章　連立 1 次方程式)
- ▶ 第 4 章　行列式
- ▶ 第 5 章　行列の対角化

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 ⟶ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

定理 4.6

n 次正方行列 A のある行を k 倍した行列 A'' に対して，$|A''| = k|A|$.

例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A'' = \begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A''| = kad - kbc = k(ad - bc) = k|A|.$$

定理 4.7

n 次正方行列 A のある行が行ベクトルの和 $\mathbb{a}+\mathbb{a}'$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \mathbb{a}+\mathbb{a}' & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \mathbb{a} & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \mathbb{a}' & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例

$$A = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = (a+a')d - (b+b')c$$

$$= (ad-bc) + (a'd-b'c) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}.$$

定理 4.8

n 次正方行列 A のある (i) 行に他の行 (j) 行の k 倍を加えた行列 A''' に対して，$|A'''| = |A|$.

$$\because \quad |A'''| = \begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_i + k\,\mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_n \end{vmatrix} \overset{4.7}{=} \begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_i \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 \\ k\,\mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_n \end{vmatrix} \overset{4.6}{=} |A| + k \begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_j \\ \mathbb{a}_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{4.5}{=} |A| + k \cdot 0 = |A|.$$

まとめると … 3 つの行基本変形 I, II, III に対して，

$\boxed{\mathrm{I}}$ 行列 A の 2 つの行を入れかえた行列を A'

$\boxed{\mathrm{II}}$ 行列 A のある行を k 倍した行列を A''

$\boxed{\mathrm{III}}$ 行列 A のある行に他の行の k 倍をたした行列を A'''

とすると，

$|A'| = -|A| \quad \cdots$ (1)

$|A''| = k|A| \quad \cdots$ (2)

$|A'''| = |A| \quad \cdots$ (3)

となる．この (1), (2), (3) を用いれば，行基本変形 I, II, III によって，

$$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} a & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$ の形にできれば，(定理 4.3 より)

$|A|$ を $a \cdot |B|$ を用いて計算できる．

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \updownarrow \overset{\boxed{\mathrm{I}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times(-3) \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow \times 1 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{4.3}{=} -\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 = -4.$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 3 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \downarrow \times 2 \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \overset{4.3}{=} \begin{vmatrix} 8 & 16 & 8 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\mathrm{II}}}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 16 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \downarrow \times(-5) \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 11 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} \downarrow \times(-4) \overset{\boxed{\mathrm{III}}}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{4.3}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 11 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \cdot 11 = 88.$$

例

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \uparrow\times 1 \uparrow\times 1 \overset{\boxed{\text{III}}}{=} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{\text{II}}}{=} (x+y+z)\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ y & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix} \downarrow\times(-y) \downarrow\times(-z) \overset{\boxed{\text{III}}}{=} (x+y+z)\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-z \end{vmatrix}$$

$$\overset{4.3}{=} (x+y+z)\begin{vmatrix} x-y & 0 \\ 0 & x-z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-y)(x-z).$$

注意

n 次正方行列 A に対して，定理 4.6 を n 回使うと，
$|kA| = k^n|A|$. $\cdots$ $|kA| \neq k|A|$ $(n \geq 2)$ に注意する