

はじめに (数学基礎 B2)

数学基礎 B = 線形代数

教科書 「要点明解 線形数学」 培風館

(第1章 ベクトル)

(第2章 行列)

(第3章 連立1次方程式)

▶ 第4章 行列式

▶ 第5章 行列の対角化

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

第5章 行列の対角化

定義

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を n 次元数ベクトル という。

$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} (i = 1, \dots, n) \right\}$: n 次元数ベクトル空間 という。

定義 (対角行列)

正方行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ を 対角行列 という。

行列の対角化

正方行列 A に対して、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$: 対角行列 \cdots (1)

なる正則行列 P を見つけたい! $\cdots P$ があるとき、 A は 対角化可能 という
(\rightarrow 例 2.25 (教 p.46) の 2 次形式と楕円の回転の例を参照)

$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbb{P}_1 & \cdots & \mathbb{P}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ とすると、(1) は

$A \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbb{P}_1 & \cdots & \mathbb{P}_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbb{P}_1 & \cdots & \mathbb{P}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ とできる.

よって、 $\begin{pmatrix} | & & | \\ A\mathbb{P}_1 & \cdots & A\mathbb{P}_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1\mathbb{P}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbb{P}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

つまり、 $A\mathbb{P}_1 = \lambda_1\mathbb{P}_1, \dots, A\mathbb{P}_n = \lambda_n\mathbb{P}_n$ となる.

▶ $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とする.

定義 (固有値, 固有ベクトル, 固有空間)

$A : n \times n$ 行列.

$$A \mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}$$

なる $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$) が存在するとき,

$\lambda \in \mathbb{R}$ を A の 固有値,

$\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ を固有値 λ に対する A の 固有ベクトル,

$W_\lambda = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid A \mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}\}$ を固有値 λ に対する A の 固有空間 という.

注意

$W_\lambda = \{\text{固有値 } \lambda \text{ に関する } A \text{ の固有ベクトル } \mathbf{p}\} \cup \{\mathbf{0}\}.$

定理 5.1

$A : n \times n$ 行列.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n : A$ の固有値 (重複を許す),

$\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n : \text{それぞれ } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ に対する固有ベクトル}$

$P = (\mathbb{P}_1 \cdots \mathbb{P}_n)$ が正則 ($|P| \neq 0$) を仮定

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} : \text{対角化可能.}$$

注意

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値

定義 $\Leftrightarrow A\mathbb{P} = \lambda\mathbb{P}$ なる $\mathbb{P} \neq \mathbf{0}$ が存在

$\Leftrightarrow (\lambda E - A)\mathbb{P} = \mathbf{0}$ の解 $\mathbb{P} \neq \mathbf{0}$ がある

$\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$

$\Leftrightarrow \lambda$ は t に関する n 次方程式 $f_A(t) = |tE - A| = 0$ の解.

▶ $f_A(t)$ を 固有多項式, $f_A(t) = 0$ を 固有方程式 という

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを (すべて) 求めよ.

A の固有方程式

$$f_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -3 \\ 0 & t-2 & -3 \\ 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t-3) = 0$$

の解 $t = 1, 2, 3$ が A の固有値.

固有値 λ に対する固有ベクトル \mathbf{p} は $(\lambda E - A)\mathbf{p} = \mathbf{0}$ の解 $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ であり,

$\lambda = 1$ のとき, $\begin{pmatrix} 1-1 & -2 & -3 \\ 0 & 1-2 & -3 \\ 0 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて,

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s \neq 0).$

例 (つづき)

$\lambda = 2$ のとき,
$$\begin{pmatrix} 2-1 & -2 & -3 \\ 0 & 2-2 & -3 \\ 0 & 0 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 を解いて,

固有ベクトルは
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0).$$

$\lambda = 3$ のとき,
$$\begin{pmatrix} 3-1 & -2 & -3 \\ 0 & 3-2 & -3 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 を解いて,

固有ベクトルは
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}u \\ 3u \\ u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (u \neq 0).$$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$