はじめに　(数学基礎 B2)

数学基礎 B　＝　線形代数

教科書　「要点明解 線形数学」培風館

(第 1 章　ベクトル)
(第 2 章　行列)
(第 3 章　連立 1 次方程式)
- 第 4 章　行列式
- 第 5 章　行列の対角化

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 ⟶ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

第5章　行列の対角化

定義

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を $\underline{n \text{ 次元数ベクトル}}$ という.

$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_i \in \mathbb{R} \ (i = 1, \ldots, n) \right\}$: $\underline{n \text{ 次元数ベクトル空間}}$ という.

定義

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ を $\underline{n\ \text{次元数ベクトル}}$ という．

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, \ldots, n) \right\}$$: $\underline{n\ \text{次元数ベクトル空間}}$ という．

定義 (対角行列)

正方行列 $$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$ を $\underline{\text{対角行列}}$ という．

行列の対角化

行列の対角化

正方行列 A に対して，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$: 対角行列 $\cdots$ (1)

なる正則行列 P を見つけたい！

行列の対角化

正方行列 A に対して，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$: 対角行列　$\cdots$ (1)

なる正則行列 P を見つけたい！$\cdots$ P があるとき，A は対角化可能という

行列の対角化

正方行列 A に対して，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$: 対角行列 $\cdots$ (1)

なる正則行列 P を見つけたい！ $\cdots$ P があるとき，A は対角化可能 という

(→ 例 2.25 (教 p.46) の 2 次形式と楕円の回転の例を参照)

行列の対角化

正方行列 A に対して，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$: 対角行列 $\cdots$ (1)

なる正則行列 P を見つけたい！$\cdots$ P があるとき，A は対角化可能 という

(→ 例 2.25 (教 p.46) の 2 次形式と楕円の回転の例を参照)

$P = \begin{pmatrix} \mathbb{p}_1 & \cdots & \mathbb{p}_n \end{pmatrix}$ とすると，

行列の対角化

正方行列 A に対して，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$: 対角行列 $\cdots$ (1)

なる正則行列 P を見つけたい！ $\cdots$ P があるとき，A は対角化可能 という

(→ 例 2.25 (教 p.46) の 2 次形式と楕円の回転の例を参照)

$P = \begin{pmatrix} \mathbb{p}_1 & \cdots & \mathbb{p}_n \end{pmatrix}$ とすると，(1) は

$$A \begin{pmatrix} \mathbb{p}_1 & \cdots & \mathbb{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{p}_1 & \cdots & \mathbb{p}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$ とできる．

行列の対角化

正方行列 A に対して，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$: 対角行列　$\cdots$ (1)

なる正則行列 P を見つけたい！ $\cdots$ P があるとき，A は <u>対角化可能</u> という
(→ 例 2.25 (教 p.46) の 2 次形式と楕円の回転の例を参照)

$$P = \begin{pmatrix} \mathbb{p}_1 & \cdots & \mathbb{p}_n \end{pmatrix}$$ とすると，(1) は

$$A \begin{pmatrix} \mathbb{p}_1 & \cdots & \mathbb{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{p}_1 & \cdots & \mathbb{p}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$ とできる．

よって，$$\begin{pmatrix} A\,\mathbb{p}_1 & \cdots & A\,\mathbb{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\,\mathbb{p}_1 & \cdots & \lambda_n\,\mathbb{p}_n \end{pmatrix}.$$

行列の対角化

正方行列 A に対して，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$: 対角行列 $\quad \cdots$ (1)

なる正則行列 P を見つけたい！ $\cdots$ P があるとき，A は対角化可能 という

(→ 例 2.25 (教 p.46) の 2 次形式と楕円の回転の例を参照)

$P = \begin{pmatrix} \mathbb{p}_1 & \cdots & \mathbb{p}_n \end{pmatrix}$ とすると，(1) は

$$A \begin{pmatrix} \mathbb{p}_1 & \cdots & \mathbb{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{p}_1 & \cdots & \mathbb{p}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$ とできる．

よって，$\begin{pmatrix} A\,\mathbb{p}_1 & \cdots & A\,\mathbb{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\,\mathbb{p}_1 & \cdots & \lambda_n\,\mathbb{p}_n \end{pmatrix}$.

つまり，$\boxed{A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1, \ldots, A\,\mathbb{p}_n = \lambda_n\,\mathbb{p}_n}$ となる．

- $\mathbb{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とする.

定義 (固有値，固有ベクトル，固有空間)

$A : n \times n$ 行列.

- $\mathbb{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とする.

定義 (固有値，固有ベクトル，固有空間)

$A : n \times n$ 行列.

$$A\mathbb{p} = \lambda \mathbb{p}$$

- $\mathbb{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とする.

定義 (固有値，固有ベクトル，固有空間)

$A : n \times n$ 行列.

$$A\mathbb{p} = \lambda \mathbb{p}$$

なる $\mathbb{p} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{p} \neq \mathbb{o})$ が存在するとき,

- $\mathbb{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とする.

定義 (固有値, 固有ベクトル, 固有空間)

$A : n \times n$ 行列.

$$A\,\mathbb{p} = \lambda\,\mathbb{p}$$

なる $\mathbb{p} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{p} \neq \mathbb{o})$ が存在するとき,

$\lambda \in \mathbb{R}$ を A の固有値,

- $\mathbb{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とする.

定義 (固有値, 固有ベクトル, 固有空間)

$A : n \times n$ 行列.

$$A\mathbb{p} = \lambda \mathbb{p}$$

なる $\mathbb{p} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{p} \neq \mathbb{o})$ が存在するとき,

$\lambda \in \mathbb{R}$ を A の <u>固有値</u>,

$\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ を固有値 λ に対する A の <u>固有ベクトル</u>,

- $\mathbb{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とする.

定義 (固有値，固有ベクトル，固有空間)

$A : n \times n$ 行列.

$$A\,\mathbb{p} = \lambda\,\mathbb{p}$$

なる $\mathbb{p} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{p} \neq \mathbb{o})$ が存在するとき,

$\lambda \in \mathbb{R}$ を A の <u>固有値</u>,

$\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ を固有値 λ に対する A の <u>固有ベクトル</u>,

$W_\lambda = \{\mathbb{p} \in \mathbb{R}^n \mid A\,\mathbb{p} = \lambda\,\mathbb{p}\}$ を固有値 λ に対する A の <u>固有空間</u> という.

- $\mathbb{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とする.

定義 (固有値，固有ベクトル，固有空間)

$A : n \times n$ 行列.

$A\,\mathbb{p} = \lambda\,\mathbb{p}$

なる $\mathbb{p} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{p} \neq \mathbb{o})$ が存在するとき,

$\lambda \in \mathbb{R}$ を A の <u>固有値</u>,

$\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ を固有値 λ に対する A の <u>固有ベクトル</u>,

$W_\lambda = \{\mathbb{p} \in \mathbb{R}^n \mid A\,\mathbb{p} = \lambda\,\mathbb{p}\}$ を固有値 λ に対する A の <u>固有空間</u> という.

注意

$W_\lambda = \{$ 固有値 λ に関する A の固有ベクトル $\mathbb{p}\} \cup \{\mathbb{o}\}$.

定理 5.1

$A : n \times n$ 行列.

定理 5.1

$A : n \times n$ 行列.
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n : A$ の固有値 (重複を許す),

定理 5.1

$A : n \times n$ 行列.
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$: A の固有値 (重複を許す),
$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$: それぞれ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ に対する固有ベクトル

定理 5.1

$A : n \times n$ 行列.
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$: A の固有値 (重複を許す),
$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$: それぞれ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ に対する固有ベクトル
$\underline{P = (\mathbb{p}_1 \ \cdots \ \mathbb{p}_n)}$ が正則 $(|P| \neq 0)$ を仮定

定理 5.1

$A : n \times n$ 行列.
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$: A の固有値 (重複を許す),
$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$: それぞれ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ に対する固有ベクトル
$\underline{P = (\mathbb{p}_1 \ \cdots \ \mathbb{p}_n)}$ が正則 ($|P| \neq 0$) を仮定

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$: 対角化可能.

定理 5.1

A : $n \times n$ 行列.
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$: A の固有値 (重複を許す),
$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$: それぞれ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ に対する固有ベクトル
$\underline{P = (\mathbb{p}_1 \ \cdots \ \mathbb{p}_n)}$ が正則 ($|P| \neq 0$) を仮定

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$: 対角化可能.

注意

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値

定理 5.1

$A : n \times n$ 行列.
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$: A の固有値 (重複を許す),
$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$: それぞれ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ に対する固有ベクトル
$P = (\mathbb{p}_1 \ \cdots \ \mathbb{p}_n)$ が正則 ($|P| \neq 0$) を仮定

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$: 対角化可能.

注意

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値
$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $A\mathbb{p} = \lambda\mathbb{p}$ なる $\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ が存在

定理 5.1

$A : n \times n$ 行列.
$\lambda_1, \dots, \lambda_n$: A の固有値 (重複を許す),
$\mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_n$: それぞれ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ に対する固有ベクトル
$P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ が正則 ($|P| \neq 0$) を仮定

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$: 対角化可能.

注意

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値
$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $A\mathbb{p} = \lambda\mathbb{p}$ なる $\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ が存在
$\Leftrightarrow$ $(\lambda E - A)\mathbb{p} = \mathbb{o}$ の解 $\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ がある

定理 5.1

$A : n \times n$ 行列.
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$: A の固有値 (重複を許す),
$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$: それぞれ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ に対する固有ベクトル
$P = (\mathbb{p}_1 \ \cdots \ \mathbb{p}_n)$ が正則 ($|P| \neq 0$) を仮定

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} : \text{対角化可能.}$$

注意

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値
$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $A\mathbb{p} = \lambda\mathbb{p}$ なる $\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ が存在
$\Leftrightarrow$ $(\lambda E - A)\mathbb{p} = \mathbb{o}$ の解 $\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ がある
$\Leftrightarrow$ $|\lambda E - A| = 0$

定理 5.1

$A : n \times n$ 行列.
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$: A の固有値 (重複を許す),
$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$: それぞれ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ に対する固有ベクトル
$\underline{P = (\mathbb{p}_1 \ \cdots \ \mathbb{p}_n)}$ が正則 ($|P| \neq 0$) を仮定

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$: 対角化可能.

注意

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値
$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $A\mathbb{p} = \lambda \mathbb{p}$ なる $\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ が存在
$\Leftrightarrow$ $(\lambda E - A)\mathbb{p} = \mathbb{o}$ の解 $\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ がある
$\Leftrightarrow$ $|\lambda E - A| = 0$
$\Leftrightarrow$ λ は t に関する n 次方程式 $f_A(t) = |tE - A| = 0$ の解.

定理 5.1

A : $n \times n$ 行列.
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$: A の固有値 (重複を許す),
$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$: それぞれ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ に対する固有ベクトル
$P = (\mathbb{p}_1 \ \cdots \ \mathbb{p}_n)$ が正則 ($|P| \neq 0$) を仮定

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$: 対角化可能.

注意

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値
$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $A\mathbb{p} = \lambda\mathbb{p}$ なる $\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ が存在
$\Leftrightarrow$ $(\lambda E - A)\mathbb{p} = \mathbb{o}$ の解 $\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ がある
$\Leftrightarrow$ $|\lambda E - A| = 0$
$\Leftrightarrow$ λ は t に関する n 次方程式 $f_A(t) = |tE - A| = 0$ の解.

- $f_A(t)$ を 固有多項式, $f_A(t) = 0$ を 固有方程式 という

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを (すべて) 求めよ.

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを (すべて) 求めよ.

A の固有方程式

$$f_A(t) = |t\,E - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -3 \\ 0 & t-2 & -3 \\ 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t-3) = 0$$

の解 $t = 1,\ 2,\ 3$ が A の固有値.

例

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを (すべて) 求めよ.

A の固有方程式

$$f_A(t)=|t\,E-A|=\begin{vmatrix} t-1 & -2 & -3 \\ 0 & t-2 & -3 \\ 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix}=(t-1)(t-2)(t-3)=0$$

の解 $t=1,\,2,\,3$ が A の固有値.

固有値 λ に対する固有ベクトル $\mathbb{p}$ は $(\lambda\,E-A)\,\mathbb{p}=\mathbb{o}$ の解 $\mathbb{p}\neq\mathbb{o}$ であり,

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを (すべて) 求めよ．

A の固有方程式

$$f_A(t) = |t\,E - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -3 \\ 0 & t-2 & -3 \\ 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t-3) = 0$$

の解 $t = 1,\ 2,\ 3$ が A の固有値．

固有値 λ に対する固有ベクトル $\mathbb{p}$ は $(\lambda E - A)\,\mathbb{p} = \mathbb{o}$ の解 $\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ であり，

$\boxed{\lambda = 1}$ のとき，

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを (すべて) 求めよ.

A の固有方程式

$$f_A(t) = |t\,E - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -3 \\ 0 & t-2 & -3 \\ 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t-3) = 0$$

の解 $t = 1, 2, 3$ が A の固有値.

固有値 λ に対する固有ベクトル $\mathbb{p}$ は $(\lambda E - A)\,\mathbb{p} = \mathbb{o}$ の解 $\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ であり,

$\boxed{\lambda = 1}$ のとき, $\begin{pmatrix} 1-1 & -2 & -3 \\ 0 & 1-2 & -3 \\ 0 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて,

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを (すべて) 求めよ．

A の固有方程式

$$f_A(t) = |t\,E - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -3 \\ 0 & t-2 & -3 \\ 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t-3) = 0$$

の解 $t = 1, 2, 3$ が A の固有値．

固有値 λ に対する固有ベクトル $\mathbb{p}$ は $(\lambda E - A)\,\mathbb{p} = \mathbb{o}$ の解 $\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ であり，

$\boxed{\lambda = 1}$ のとき，$\begin{pmatrix} 1-1 & -2 & -3 \\ 0 & 1-2 & -3 \\ 0 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて，

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(s \neq 0)$.

例 (つづき)

$\boxed{\lambda = 2}$ のとき,

例 (つづき)

$\boxed{\lambda = 2}$ のとき, $\begin{pmatrix} 2-1 & -2 & -3 \\ 0 & 2-2 & -3 \\ 0 & 0 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて,

例 (つづき)

$\boxed{\lambda = 2}$ のとき，$\begin{pmatrix} 2-1 & -2 & -3 \\ 0 & 2-2 & -3 \\ 0 & 0 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて，

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (t \neq 0)$.

例 (つづき)

$\boxed{\lambda = 2}$ のとき，$\begin{pmatrix} 2-1 & -2 & -3 \\ 0 & 2-2 & -3 \\ 0 & 0 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて，

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$.

$\boxed{\lambda = 3}$ のとき，

例 (つづき)

$\boxed{\lambda = 2}$ のとき，$\begin{pmatrix} 2-1 & -2 & -3 \\ 0 & 2-2 & -3 \\ 0 & 0 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて，

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$.

$\boxed{\lambda = 3}$ のとき，$\begin{pmatrix} 3-1 & -2 & -3 \\ 0 & 3-2 & -3 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて，

例 (つづき)

$\boxed{\lambda = 2}$ のとき, $\begin{pmatrix} 2-1 & -2 & -3 \\ 0 & 2-2 & -3 \\ 0 & 0 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて,

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$.

$\boxed{\lambda = 3}$ のとき, $\begin{pmatrix} 3-1 & -2 & -3 \\ 0 & 3-2 & -3 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて,

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}u \\ 3u \\ u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(u \neq 0)$.

例 (つづき)

$\boxed{\lambda = 2}$ のとき, $\begin{pmatrix} 2-1 & -2 & -3 \\ 0 & 2-2 & -3 \\ 0 & 0 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて,

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (t \neq 0).$

$\boxed{\lambda = 3}$ のとき, $\begin{pmatrix} 3-1 & -2 & -3 \\ 0 & 3-2 & -3 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて,

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}u \\ 3u \\ u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \ (u \neq 0).$

$$\therefore \ P = \begin{pmatrix} \mathbb{p}_1 & \mathbb{p}_2 & \mathbb{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$