

はじめに (数学基礎 B2)

数学基礎 B = 線形代数

教科書 「要点明解 線形数学」 培風館

(第1章 ベクトル)

(第2章 行列)

(第3章 連立1次方程式)

▶ 第4章 行列式

▶ 第5章 行列の対角化

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

命題

A : n 次正方行列, $f_A(t) = |tE - A|$: A の固有多項式とする.

(1) $f_{P^{-1}AP}(t) = f_A(t)$;

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n).$

\because (1) $|AB| = |A||B|$ と $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ より, $f_{P^{-1}AP}(t) = |tE - P^{-1}AP|$
 $= |P^{-1}(tE - A)P| = |P^{-1}||tE - A||P| = \frac{1}{|P|} |tE - A| |P| = |tE - A|$
 $= f_A(t)$. (2) も (1) より OK.

- ▶ A が対角化可能 $\Rightarrow f_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_k)^{n_k}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$: 重複なし)
($f_A(t) = 0$ は (重複度込みで) n 個の実数解をもつ : $n = n_1 + \cdots + n_k$)
- ▶ 逆に, 各固有値 λ_i に対して, $(A - \lambda_i E) \mathbb{P}_{i,j} = \mathbb{0}$ なる固有ベクトル
 $\mathbb{P}_{i,1}, \dots, \mathbb{P}_{i,n_i}$ が λ_i の重複度分 n_i 個存在して, 各 $\mathbb{P}_{i,j}$ を並べた行列 P
が正則 ($|P| \neq 0$) ならば, A は対角化可能.

定理 5.2

A : n 次正方行列, $f_A(t) = |tE - A|$: A の固有多項式とする.

$f_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_k)^{n_k}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$: 重複なし),

$\text{rank}(A - \lambda_i E) = n - n_i$ ($1 \leq i \leq k$)

$\Rightarrow A$ は対角化可能.

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. A の固有多項式

$$f_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -3 & -2 \\ -2 & t-2 & -2 \\ -3 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = t(t+1)(t-6).$$

A の固有値 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 6$.

$\text{rank}(A - 0 \cdot E) = 2$, $\text{rank}(A - (-1) \cdot E) = 2$, $\text{rank}(A - 6 \cdot E) = 2$.

定理 5.2 より, A は対角化可能. (各自, 確認する)

- ▶ 次に、 $P^T = P^{-1}$ となる P を選べる場合について考える

定義

$P^T P = E_n$ となる正方行列 P を 直交行列 という。… $P^T = P^{-1}$ となる

定義

$A: n \times n$ 行列.

A : 直交対角化可能 $\xLeftrightarrow{\text{定義}}$ 直交行列 P で $P^{-1}AP$ を対角行列にできる.
(対角化可能) (正則行列 P)

注意

$P^{-1}AP = D$ (対角行列) とする. A は 直交対角化可能 とすると,

$$P: \text{直交行列} \xLeftrightarrow{\text{定義}} P^{-1} = P^T$$

$$\Rightarrow A = PDP^T$$

$$\Rightarrow A^T = PD^T P^T = PDP^T (\because D^T = D)$$

$$\Rightarrow A^T = A \Rightarrow A \text{ は } \text{対称行列}.$$

… 実は、逆も成り立つ

定理 5.3

A : 正方行列.

A : **直交対角化可能** $\Leftrightarrow A$: **対称行列**.

定義

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

\mathbf{x} と \mathbf{y} の 内積 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n (= \mathbf{x}^T \mathbf{y})$ が定義されているとき, \mathbb{R}^n を \mathbb{E}^n と書き, n 次元ユークリッド空間 という.

このときの座標を, 正規直交座標 という.

- ▶ この座標は原点 $\mathbf{0}$ を通り, n 個のベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^n \text{ を座標軸に含む.}$$

$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ を \mathbb{E}^n の 標準基底 という.

例

$A, B : n \times n$ 行列. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n$ に対して, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ に注意する.
 A の i 行の転置を \mathbf{A}_i , B の j 列を \mathbf{b}_j とすれば,

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{b}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{A}_n, \mathbf{b}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{A}_n, \mathbf{b}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

特に, $P^T P = E_n$ のときを考えれば,

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{pmatrix} \text{ が直交行列} \Leftrightarrow \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

この δ_{ij} を クロネッカーのデルタ という.

5.2 正規直交化法と直交対角化法

定理 5.4 (内積の性質)

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{E}^n, c \in \mathbb{R}$.

- (1) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- (2) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$.
- (3) $\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, $\langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle = c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.
- (4) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$.

定義

$\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$.

\mathbf{x} の 大きさ $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$. (内積の定義から, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$)

例

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^2$ の大きさは, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

