

# はじめに (数学基礎 B2)

数学基礎 B = 線形代数

教科書 「要点明解 線形数学」 培風館

(第1章 ベクトル)

(第2章 行列)

(第3章 連立1次方程式)

▶ 第4章 行列式

▶ 第5章 行列の対角化

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。  
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

## 5.3 基底と座標

### 定義 (基底, 座標)

$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  が  $\mathbb{R}^n$  の 基底 であるとは、すべての  $a \in \mathbb{R}^n$  が  $a = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$  ( $b_i \in \mathbb{R}$ ) と 一意的 (ただ1通り) に表せること。

このとき、 $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  を 基底  $v_1, \dots, v_n$  に関する  $a$  の座標 という。

▶ 一意的 (ただ1通り) とは …

$$a = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \Rightarrow b_1 = c_1, \dots, b_n = c_n.$$

### 例

$n$  次元ユークリッド空間  $\mathbb{E}^n$  の座標は 正規直交座標 とよばれ、

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^n \text{ を } \mathbb{E}^n \text{ の標準基底と} \text{ いった。}$$

## 注意

基底の定義の式  $\mathbf{a} = b_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + b_n \mathbf{v}_n$  ( $b_i \in \mathbb{R}$ ) は,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} v_{1i} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (i = 1, \dots, n) \text{ に対して,}$$
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + b_n \begin{pmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

となる. よって,

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$  が  $\mathbb{R}^n$  の基底  $\Leftrightarrow$  すべての  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  に対して,

$$\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ がただ一つの解 } \mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ をもつ.}$$

## 定理 5.8

$\mathbf{x}$ : 標準基底  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  に関する座標,

$\mathbf{x}'$ : 基底  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  に関する座標

$\Rightarrow \mathbf{x} = P \mathbf{x}'$ . 但し,  $P = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$  で  $|P| \neq 0$ . ( $\Rightarrow \mathbf{x}' = P^{-1} \mathbf{x}$  となる)

## 定理 5.9

$P$ :  $n$  次正方行列.

$P$ : 正則  $\Leftrightarrow P$  の列ベクトル全体が  $\mathbb{R}^n$  の基底.

## 定義 (正規直交基底)

大きさが 1 で互いに直交しているベクトルからなる基底を 正規直交基底 という.

## 例

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{E}^n$  を大きさが1で互いに直交しているとする。

前回の注意より,  $A = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$  は直交行列 ( $A^T A = E$ ) であり,

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  は正規直交基底となる. 実際, すべての  $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$  に対して,

$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$  と一意的に表せる.

$\therefore \mathbf{x} = k_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + k_n \mathbf{v}_n \Rightarrow k_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を示す.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle k_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + k_n \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle$$

$$= k_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + k_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + k_n \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle$$

$$= k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i \cdot 1 + \cdots + k_n \cdot 0 = k_i.$$

$$(\because \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = 0 \ (i \neq j), \ ||\mathbf{v}_i|| = 1)$$

▶ (標準基底  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{E}^n$  のかわりに)

$\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$  に対して, 正規直交基底  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  を用いて,

正規直交座標  $\begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \end{pmatrix}$  を導入できる.

## 定義 (線形写像, 線形変換)

$$\text{写像 } y = f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

の各  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  が  $x_1, \dots, x_n$  の同次 1 次式 (定数項なし) のとき,  $y = f(\mathbf{x})$  を 線形写像 という. 特に,  $m = n$  のとき, 線形変換 という.

## 注意

線形写像  $y = f(\mathbf{x})$  は

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \text{ とかけるので,}$$

$$y = A\mathbf{x}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

## 定理 5.10

$y = f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  : 線形写像.

(1)  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  に対して,  $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ ;

(2)  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  と  $c \in \mathbb{R}$  に対して,  $f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ .

逆に, (1), (2) をみたす写像  $y = f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  は線形写像.

## 例

$y = f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  : **線形変換**,  $y = Ax$ ,  $A : n \times n$  行列.  
 $A$  の固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (重複を許す) に対する,  $A$  の固有ベクトルを  $p_1, \dots, p_n$  とする. さらに,  $p_1, \dots, p_n$  は  $\mathbb{R}^n$  の基底を仮定する.

このとき, すべての  $x \in \mathbb{R}^n$  は

$$x = X_1 p_1 + \dots + X_n p_n \quad (X_i \in \mathbb{R}) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と一意的に表せる. また,

$$f(x) = f(X_1 p_1 + \dots + X_n p_n) = A(X_1 p_1 + \dots + X_n p_n) = AX_1 p_1 + \dots + AX_n p_n = (\lambda_1 X_1) p_1 + \dots + (\lambda_n X_n) p_n \quad (\because A p_i = \lambda_i p_i)$$

より, 原点を通り, それぞれ  $p_1, \dots, p_n$  に平行な直線を座標軸にとれば,

この  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$  座標について,  $f(X) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} X = D X$  となる.  $x = P X$ ,  $P = (p_1 \cdots p_n)$  で,  $Ax = f(x) = P D X = P D P^{-1} x$ . すなわち,  $P^{-1} A P = D$ .

▶ 固有ベクトルに平行な座標軸  $X$  をとれば,  $f$  は簡潔な式になる!



- ▶ さらに … 実は、次が成り立つ：

## 定理

$P$  :  $n \times n$  行列. 次は同値 :

- (a)  $P$  は **直交行列** ( $P^{-1} = P^T$ );
- (b)  $P$  の列ベクトル全体は  $\mathbb{R}^n$  の **正規直交基底** ;
- (c) すべての  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  に対して,  $\|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ ;
- (d) すべての  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  に対して,  $\langle P\mathbf{x}, P\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ .

- ▶  $\mathbf{x} = P\mathbb{X}$ ,  $P = (p_1 \cdots p_n)$ ,  $P$  は **直交行列** とすると, 内積を変えない座標の変換, したがって, 長さや角度を変えない座標の変換となる.  
( $\because \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} = \cos \theta, \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ )
- ▶ 直交対角化  $P^{-1}AP = D$ ,  $P^{-1} = P^T$  は内積 (長さや角度) を変えない座標の変換によって **線形変換**  $f$  をあらわしたもの.
- ▶ 実は, 第 2 章の最後の例 2.25 (p. 46) (2 次形式と楕円の回転の例) が **直交対角化** の例になっていた!

## 6.1 行列のべきの計算と応用

### 例 (前回の例のつづき)

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  に対して,  $A^n$  を求めよ. 前回の例の Step 2 より,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  に対して,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

(いまは Step 3 の直交対角化は必要ない. 対角化のみで OK. )

$$\therefore A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\therefore A^n = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

## 例 (前回の例のつづき)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{であるから,}$$

$$\begin{aligned} \therefore A^n &= P \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n & 2^n & 2^n \\ 5^n & -2^n & 0 \\ 5^n & 0 & -2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2 \cdot 2^n & 5^n - 2 \cdot 2^n + 2^n & 5^n + 2^n - 2 \cdot 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2 \cdot 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & 5^n + 2 \cdot 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$