

在籍番号		氏名	
------	--	----	--

[1] (定義) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の であるとは、すべての $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ が

$\mathbf{a} = b_1 \mathbf{v}_1 + \dots + b_n \mathbf{v}_n$ ($b_i \in \mathbb{R}$) と一意的に表せること. このとき, $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ を $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ に関する $\mathbf{a}$ の座標という.

[2] (定義) 写像 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ の各 $f_i(x_1, \dots, x_n)$ が

$x_1, \dots, x_n$ の同次 1 次式の時, $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ を という.

特に, $m = n$ のとき, 線形変換という.

[3] 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする. A の固有多項式は (1) である.

A の固有値は, $\lambda_1 = \text{}$ (2) と $\lambda_2 = \text{}$ (3) (2 重解) の 2 つである.

A の λ_1 に対する固有ベクトルとして, $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \text{} \end{pmatrix}$ (4) がとれ,

λ_2 に対する固有ベクトルとして, $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれる.

但し, 3×3 行列 $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3)$ が正則行列になるようにとる.

行列 P の逆行列は $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & \text{} \end{pmatrix}$ (5), $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \text{} \end{pmatrix}$ (6) となる.

さらに, A を直交対角化するには, グラム・シュミットの正規直交化法を用いて, 行列

$P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3)$ から直交行列 $Q = (\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \mathbf{q}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \text{} \end{pmatrix}$ (7) を作ればよい.

応用として, $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2 \cdot 2^n & 5^n - 2 \cdot 2^n + 2^n & 5^n + 2^n - 2 \cdot 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2 \cdot 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & \text{} \end{pmatrix}$ (8) がえられる.