はじめに　(線形代数 IIA)

$\boxed{\text{線形代数 II} \quad = \quad \text{線形代数 I のつづき}}$

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

5.4 行列の相似性

定理 5

V : 線形空間，$\dim(V) < \infty$. $T : V \to V$: V 上の 1 次変換，
A : V の基底 B に関する T の行列，A' : V の基底 B' に関する T の行列
$\Rightarrow A' = P^{-1}AP$. 但し，$[\mathbb{x}]_B = P[\mathbb{x}]_{B'}$. ($P$ は B' から B への変換行列)

(証明) $A\mathbb{u} = \mathbb{v}$ を $\mathbb{u} \xrightarrow{A} \mathbb{v}$ とかくと，(可換図式とよばれる) 次をえる：

$$
\begin{tikzcd}
{[\mathbb{x}]_B} \arrow[r, "A"] & {[T(\mathbb{x})]_B} \arrow[d, "P^{-1}"] \\
{[\mathbb{x}]_{B'}} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "A'", "P^{-1}AP"'] & {[T(\mathbb{x})]_{B'}}.
\end{tikzcd}
$$

$\therefore\ A'[\mathbb{x}]_{B'} = P^{-1}AP[\mathbb{x}]_{B'}$.
$\mathbb{x} \in V$ は任意であるから，$B' = \{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n\}$ に対して，$\mathbb{x} = \mathbb{v}_i$ とすれば，$[\mathbb{v}_i]_{B'} = \mathbb{e}_i$ (標準単位ベクトル).
$\therefore\ A' = P^{-1}AP$. □

定義 (対角行列)

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$ を 対角行列 という． (対角 ⋯ diagonal)

定義 (相似)

A, A' : 正方行列．

A' は A に 相似 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists P$ s.t. $A' = P^{-1}AP$. (相似 ⋯ similar)

A は A' に相似のとき，$A \sim A'$ とかく．

注意

相似 ($\sim$) は同値関係，i.e. $A \sim A$ (反射律), $A \sim A' \Rightarrow A' \sim A$ (対称律), $A \sim A'$, $A' \sim A'' \Rightarrow A \sim A''$ (推移律) をみたす．($\because$ 各自考える)

$\longrightarrow$ $n \times n$ 行列全体はいくつかの同値類に類別 (クラス分け) される．

例

$V = \mathbb{R}^2$, $T = T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{x} \mapsto A\mathbb{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

$B = \{\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2\}$, $\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$B' = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $\mathbb{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$P = ([\mathbb{u}_1]_B \ [\mathbb{u}_2]_B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ であるから,

$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\therefore\ A \sim A'$ (相似). (A は基底変換によって対角行列 A' とできる)

注意

定理 5 より「$T : V \to V$ を表す行列は (基底変換によって) 相似」

定義 (固有値，固有ベクトル)

$A : n \times n$ 行列.
$A\mathbb{x} = \lambda\mathbb{x}$ をみたす $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ を A の (λ に対する) 固有ベクトル，
$\lambda \in \mathbb{R}$ を A の 固有値 という.
(固有ベクトル ⋯ eigenvector，固有値 ⋯ eigenvalue)

例

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ より，

$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は A の固有値 3 に対する固有ベクトル.

問

A の固有値は (いくつ) 存在するか？
$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値
$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $A\,\mathbb{x} = \lambda\,\mathbb{x}$
$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $(\lambda I - A)\,\mathbb{x} = \mathbb{o}$
$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ は固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ をみたす.

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値は $\lambda = 1, 2$ (のみ). $\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$
$= \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0.$

例

$A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値はなし. $\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$
$= \det\begin{pmatrix} \lambda+2 & 1 \\ -5 & \lambda-2 \end{pmatrix} = \lambda^2+1>0$ より解なし.

例

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値は $\lambda = 4, 2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$. $\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$
$= \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -3 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda + 17\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda^2-4\lambda+1) = 0.$

注意

A : $n\times n$ 行列 $\Rightarrow$ A の固有値は n 個以下.

- まとめると ⋯

定理 1

$A : n \times n$ 行列．次は同値：
(a) λ は A の固有値；
(b) $(\lambda I - A)\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は自明でない解 $\mathbb{x} \neq \mathbb{o}$ をもつ；
(c) $\exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $A\mathbb{x} = \lambda \mathbb{x}$;
(d) λ は固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ の実数解.

定義 (固有空間)

$W_\lambda = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda I - A)\mathbb{x} = \mathbb{o}\} \subset \mathbb{R}^n$：解空間を
A の固有値 λ に対する固有空間 という.

- $W_\lambda = \{A$ の λ に対する固有ベクトル$\} \cup \{\mathbb{o}\}$

注意

固有値，固有ベクトル，固有空間は一般の $V \neq \mathbb{R}^n$ に対して定義できる.
(教 pp. 292～293)

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の (各固有値に対する) 固有空間を求めよ.

A の固有方程式

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0$$ より,

A の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

$$W_\lambda = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ より,

$$W_1 = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{各自}}{=} \left\{ \mathbb{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \mathbb{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (t \in \mathbb{R}) \right\}.$$

$$W_5 = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{各自}}{=} \left\{ \mathbb{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \mathbb{x} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (s, t \in \mathbb{R}) \right\}.$$

$\therefore\ \dim(W_1) = 1,\ \dim(W_5) = 2.$ (1 次独立な固有ベクトルが 2 つある！)