はじめに　(線形代数 IIA)

$\boxed{\text{線形代数 II} \quad = \quad \text{線形代数 I のつづき}}$

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと.
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 ⟶ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

5.4 行列の相似性

定理 5

V : 線形空間，$\dim(V) < \infty$. $T : V \to V$: V 上の 1 次変換，
$A : V$ の基底 B に関する T の行列，$A' : V$ の基底 B' に関する T の行列
$\Rightarrow A' = P^{-1}AP$. 但し，$[\mathbf{x}]_B = P[\mathbf{x}]_{B'}$. ($P$ は B' から B への変換行列)

5.4 行列の相似性

定理 5

V : 線形空間，$\dim(V) < \infty$. $T : V \to V$: V 上の 1 次変換，
A : V の基底 B に関する T の行列，A' : V の基底 B' に関する T の行列
$\Rightarrow A' = P^{-1}AP$. 但し，$[\mathbf{x}]_B = P[\mathbf{x}]_{B'}$. ($P$ は B' から B への変換行列)

(証明)

5.4 行列の相似性

定理 5

V : 線形空間, $\dim(V) < \infty$. $T : V \to V$: V 上の 1 次変換,
$A : V$ の基底 B に関する T の行列, $A' : V$ の基底 B' に関する T の行列
$\Rightarrow A' = P^{-1}AP$. 但し, $[\mathbb{x}]_B = P[\mathbb{x}]_{B'}$. ($P$ は B' から B への変換行列)

(証明) $A\mathbb{u} = \mathbb{v}$ を $\mathbb{u} \xrightarrow{A} \mathbb{v}$ とかくと,

5.4　行列の相似性

定理 5

V : 線形空間，$\dim(V) < \infty$. $T : V \to V$: V 上の 1 次変換，
A : V の基底 B に関する T の行列，A' : V の基底 B' に関する T の行列
$\Rightarrow A' = P^{-1}AP$. 但し，$[\mathbb{x}]_B = P[\mathbb{x}]_{B'}$. ($P$ は B' から B への変換行列)

(証明) $A\mathbb{u} = \mathbb{v}$ を $\mathbb{u} \xrightarrow{A} \mathbb{v}$ とかくと，(可換図式とよばれる) 次をえる：

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbb{x}]_B} \arrow[r, "A"] & {[T(\mathbb{x})]_B} \arrow[d, "P^{-1}"] \\
{[\mathbb{x}]_{B'}} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "A'", "P^{-1}AP"'] & {[T(\mathbb{x})]_{B'}}.
\end{tikzcd}$$

5.4 行列の相似性

定理 5

V：線形空間，$\dim(V) < \infty$. $T : V \to V$: V 上の 1 次変換，
A : V の基底 B に関する T の行列，A' : V の基底 B' に関する T の行列
$\Rightarrow A' = P^{-1}AP$. 但し，$[\mathbb{x}]_B = P[\mathbb{x}]_{B'}$. ($P$ は B' から B への変換行列)

(証明) $A\mathbb{u} = \mathbb{v}$ を $\mathbb{u} \xrightarrow{A} \mathbb{v}$ とかくと，(可換図式とよばれる) 次をえる：

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{x}]_B & \xrightarrow{A} & [T(\mathbb{x})]_B \\ P\uparrow & & \downarrow P^{-1} \\ [\mathbb{x}]_{B'} & \xrightarrow[P^{-1}AP]{A'} & [T(\mathbb{x})]_{B'}. \end{array} \qquad \therefore\ A'[\mathbb{x}]_{B'} = P^{-1}AP[\mathbb{x}]_{B'}.$$

5.4 行列の相似性

定理 5

V : 線形空間, $\dim(V) < \infty$. $T : V \to V$: V 上の 1 次変換,
$A : V$ の基底 B に関する T の行列, $A' : V$ の基底 B' に関する T の行列
$\Rightarrow A' = P^{-1}AP$. 但し, $[\mathbb{x}]_B = P[\mathbb{x}]_{B'}$. ($P$ は B' から B への変換行列)

(証明) $A\mathbb{u} = \mathbb{v}$ を $\mathbb{u} \xrightarrow{A} \mathbb{v}$ とかくと, (可換図式とよばれる) 次をえる :

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbb{x}]_B} \arrow[r, "A"] & {[T(\mathbb{x})]_B} \arrow[d, "P^{-1}"] \\
{[\mathbb{x}]_{B'}} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "A'", "P^{-1}AP"'] & {[T(\mathbb{x})]_{B'}.}
\end{tikzcd}$$

$\therefore\ A'[\mathbb{x}]_{B'} = P^{-1}AP[\mathbb{x}]_{B'}$.
$\mathbb{x} \in V$ は任意であるから, $B' = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$ に対して, $\mathbb{x} = \mathbb{v}_i$ とすれば, $[\mathbb{v}_i]_{B'} = \mathbb{e}_i$ (標準単位ベクトル).

5.4 行列の相似性

定理 5

V：線形空間，$\dim(V) < \infty$. $T: V \to V$：V 上の 1 次変換，
A：V の基底 B に関する T の行列，A'：V の基底 B' に関する T の行列
$\Rightarrow A' = P^{-1}AP$. 但し，$[\mathbb{x}]_B = P[\mathbb{x}]_{B'}$. ($P$ は B' から B への変換行列)

(証明) $A\mathbb{u} = \mathbb{v}$ を $\mathbb{u} \xrightarrow{A} \mathbb{v}$ とかくと，(可換図式とよばれる) 次をえる：

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbb{x}]_B} \arrow[r, "A"] & {[T(\mathbb{x})]_B} \arrow[d, "P^{-1}"] \\
{[\mathbb{x}]_{B'}} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "A'", "P^{-1}AP"'] & {[T(\mathbb{x})]_{B'}}.
\end{tikzcd}$$

$\therefore\ A'[\mathbb{x}]_{B'} = P^{-1}AP[\mathbb{x}]_{B'}$.
$\mathbb{x} \in V$ は任意であるから，$B' = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$ に対して，$\mathbb{x} = \mathbb{v}_i$ とすれば，$[\mathbb{v}_i]_{B'} = \mathbb{e}_i$ (標準単位ベクトル).
$\therefore\ A' = P^{-1}AP$. $\square$

定義 (対角行列)

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$ を <u>対角行列</u> という. (対角 ⋯ diagonal)

定義 (対角行列)

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$ を <u>対角行列</u> という. (対角 ⋯ diagonal)

定義 (相似)

A, A' : 正方行列.

A' は A に <u>相似</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists P$ s.t. $A' = P^{-1}AP$. (相似 ⋯ similar)

A は A' に相似のとき, $A \sim A'$ とかく.

定義 (対角行列)

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$ を <u>対角行列</u> という. (対角 ⋯ diagonal)

定義 (相似)

A, A' : 正方行列.

A' は A に <u>相似</u> $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists P$ s.t. $A' = P^{-1}AP$. (相似 ⋯ similar)

A は A' に相似のとき, $A \sim A'$ とかく.

注意

相似 $(\sim)$ は同値関係,

定義 (対角行列)

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$ を <u>対角行列</u> という． (対角 ··· diagonal)

定義 (相似)

A, A' : 正方行列．
A' は A に <u>相似</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists P$ s.t. $A' = P^{-1}AP$． (相似 ··· similar)
A は A' に相似のとき，$A \sim A'$ とかく．

注意

相似 ($\sim$) は同値関係，i.e. $A \sim A$ (反射律), $A \sim A' \Rightarrow A' \sim A$ (対称律), $A \sim A'$, $A' \sim A'' \Rightarrow A \sim A''$ (推移律) をみたす．($\because$ 各自考える)

定義 (対角行列)

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$ を <u>対角行列</u> という. (対角 ⋯ diagonal)

定義 (相似)

A, A' : 正方行列.

A' は A に <u>相似</u> $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists P$ s.t. $A' = P^{-1}AP$. (相似 ⋯ similar)

A は A' に相似のとき, $A \sim A'$ とかく.

注意

相似 ($\sim$) は同値関係, i.e. $A \sim A$ (反射律), $A \sim A' \Rightarrow A' \sim A$ (対称律), $A \sim A'$, $A' \sim A'' \Rightarrow A \sim A''$ (推移律) をみたす. ($\because$ 各自考える)

$\longrightarrow$ $n \times n$ 行列全体はいくつかの同値類に類別 (クラス分け) される.

例

$V = \mathbb{R}^2$, $T = T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

例

$V = \mathbb{R}^2$, $T = T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{x} \mapsto A\mathbb{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

$B = \{\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2\}$, $\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$B' = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $\mathbb{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

例

$V = \mathbb{R}^2$, $T = T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{x} \mapsto A\mathbb{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

$B = \{\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2\}$, $\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$B' = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $\mathbb{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$P = ([\mathbb{u}_1]_B \ [\mathbb{u}_2]_B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ であるから,

例

$V = \mathbb{R}^2$, $T = T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{x} \mapsto A\mathbb{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

$B = \{\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2\}$, $\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$B' = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $\mathbb{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$P = ([\mathbb{u}_1]_B\ [\mathbb{u}_2]_B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ であるから,

$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

例

$V=\mathbb{R}^2$, $T=T_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\mathbb{x}\mapsto A\mathbb{x}$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\-2&4\end{pmatrix}$.

$B=\{\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2\}$, $\mathbb{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbb{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,

$B'=\{\mathbb{u}_1,\mathbb{u}_2\}$, $\mathbb{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbb{u}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

$P=([\mathbb{u}_1]_B\ [\mathbb{u}_2]_B)=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ であるから,

$A'=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$.

$\therefore\ A\sim A'$ (相似).

例

$V = \mathbb{R}^2$, $T = T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{x} \mapsto A\mathbb{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

$B = \{\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2\}$, $\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$B' = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $\mathbb{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$P = ([\mathbb{u}_1]_B \ [\mathbb{u}_2]_B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ であるから,

$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\therefore\ A \sim A'$ (相似). (A は基底変換によって対角行列 A' とできる)

例

$V = \mathbb{R}^2$, $T = T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{x} \mapsto A\mathbb{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

$B = \{\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2\}$, $\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$B' = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\}$, $\mathbb{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$P = ([\mathbb{u}_1]_B \ [\mathbb{u}_2]_B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ であるから,

$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\therefore\ A \sim A'$ (相似). (A は基底変換によって対角行列 A' とできる)

注意

定理 5 より「$T : V \to V$ を表す行列は (基底変換によって) 相似」

定義 (固有値，固有ベクトル)

$A : n \times n$ 行列.

$A\mathbb{x} = \lambda\mathbb{x}$ をみたす $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ を A の (λ に対する) 固有ベクトル,

定義 (固有値，固有ベクトル)

$A: n \times n$ 行列.
$A\mathbb{x} = \lambda\mathbb{x}$ をみたす $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{x} \neq \mathbb{0})$ を A の (λ に対する) 固有ベクトル,
$\lambda \in \mathbb{R}$ を A の 固有値 という.

定義 (固有値，固有ベクトル)

$A : n \times n$ 行列．
$A\mathbb{x} = \lambda\mathbb{x}$ をみたす $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ を A の (λ に対する) 固有ベクトル，
$\lambda \in \mathbb{R}$ を A の 固有値 という．
(固有ベクトル $\cdots$ eigenvector，固有値 $\cdots$ eigenvalue)

定義 (固有値，固有ベクトル)

$A : n \times n$ 行列.
$A\mathbb{x} = \lambda \mathbb{x}$ をみたす $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ を A の (λ に対する) 固有ベクトル,
$\lambda \in \mathbb{R}$ を A の 固有値 という.
(固有ベクトル ⋯ eigenvector， 固有値 ⋯ eigenvalue)

例

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

定義 (固有値，固有ベクトル)

A : $n \times n$ 行列.
$A\mathbb{x} = \lambda\mathbb{x}$ をみたす $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ を A の (λ に対する) 固有ベクトル，
$\lambda \in \mathbb{R}$ を A の 固有値 という.
(固有ベクトル $\cdots$ eigenvector，固有値 $\cdots$ eigenvalue)

例

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ より，

定義 (固有値，固有ベクトル)

$A : n \times n$ 行列.
$A\mathbb{x} = \lambda\mathbb{x}$ をみたす $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ を A の (λ に対する) 固有ベクトル,
$\lambda \in \mathbb{R}$ を A の 固有値 という.
(固有ベクトル $\cdots$ eigenvector，固有値 $\cdots$ eigenvalue)

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ より，

$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は A の固有値 3 に対する固有ベクトル.

問

A の固有値は (いくつ) 存在するか？

問

A の固有値は (いくつ) 存在するか？
$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値

問

A の固有値は(いくつ)存在するか？

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値

$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $A\,\mathbb{x} = \lambda\,\mathbb{x}$

問

A の固有値は (いくつ) 存在するか？

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値

$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $A\mathbb{x} = \lambda \mathbb{x}$

$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $(\lambda I - A)\mathbb{x} = \mathbb{o}$

問

A の固有値は (いくつ) 存在するか？

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値

$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $A\,\mathbb{x} = \lambda\,\mathbb{x}$

$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $(\lambda I - A)\,\mathbb{x} = \mathbb{o}$

$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ は固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ をみたす.

問

A の固有値は (いくつ) 存在するか？
$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値
$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $A\,\mathbb{x} = \lambda\,\mathbb{x}$
$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $(\lambda I - A)\,\mathbb{x} = \mathbb{o}$
$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ は固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ をみたす.

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

問

A の固有値は (いくつ) 存在するか？

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値

$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $A\mathbb{x} = \lambda \mathbb{x}$

$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $(\lambda I - A)\mathbb{x} = \mathbb{o}$

$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ は固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ をみたす.

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値は $\lambda = 1, 2$ (のみ).

問

A の固有値は (いくつ) 存在するか？

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値

$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $A\mathbb{x} = \lambda \mathbb{x}$

$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $(\lambda I - A)\mathbb{x} = \mathbb{o}$

$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ は固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ をみたす.

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値は $\lambda = 1, 2$ (のみ). $\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$

問

A の固有値は (いくつ) 存在するか？

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値

$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $A\,\mathbb{x} = \lambda\,\mathbb{x}$

$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $(\lambda\, I - A)\,\mathbb{x} = \mathbb{o}$

$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ は固有方程式 $\det(\lambda\, I - A) = 0$ をみたす.

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値は $\lambda = 1, 2$ (のみ). $\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda\, I - A)$

$= \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

問

A の固有値は (いくつ) 存在するか？

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値

$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $A\,\mathbb{x} = \lambda\,\mathbb{x}$

$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $(\lambda\,I - A)\,\mathbb{x} = \mathbb{o}$

$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ は固有方程式 $\det(\lambda\,I - A) = 0$ をみたす.

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値は $\lambda = 1, 2$ (のみ). $\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda\,I - A)$

$= \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

問

A の固有値は (いくつ) 存在するか？
$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値
$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $A\,\mathbb{x} = \lambda\,\mathbb{x}$
$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $(\lambda I - A)\,\mathbb{x} = \mathbb{o}$
$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ は固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ をみたす.

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値は $\lambda = 1, 2$ (のみ). $\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$
$= \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0.$

例

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

例

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値はなし.　　$\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$

例

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値はなし. $\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$

$= \det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$

例

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値はなし.　$\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$

$= \det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 > 0$ より解なし.

例

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値はなし. $\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$

$= \det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 > 0$ より解なし.

例

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

例

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値はなし. $\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$
$= \det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 > 0$ より解なし.

例

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値は $\lambda = 4, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$.

例

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値はなし. $\quad \because A$ の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$
$= \det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 > 0$ より解なし.

例

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値は $\lambda = 4, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$. $\quad \because A$ の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$

例

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値はなし. $\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$
$= \det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 > 0$ より解なし.

例

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値は $\lambda = 4, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$. $\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$
$= \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -3 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$

例

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値はなし. $\quad \because A$ の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$

$= \det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 > 0$ より解なし.

例

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値は $\lambda = 4, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$. $\quad \because A$ の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$

$= \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -3 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda + 17\lambda - 4$

例

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値はなし.　$\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$
$= \det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 > 0$ より解なし.

例

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値は $\lambda = 4, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$.　$\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$
$= \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -3 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda + 17\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0.$

例

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値はなし.　$\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$
$= \det \begin{pmatrix} \lambda+2 & 1 \\ -5 & \lambda-2 \end{pmatrix} = \lambda^2+1 > 0$ より解なし.

例

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値は $\lambda = 4, 2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$.　$\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$
$= \det \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -3 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda + 17\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda^2-4\lambda+1) = 0.$

注意

$A : n \times n$ 行列 $\Rightarrow$ A の固有値は n 個以下.

- まとめると $\cdots$

定理 1

A : $n\times n$ 行列．次は同値：

(a) λ は A の固有値；

(b) $(\lambda I - A)\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は自明でない解 $\mathbb{x}\neq\mathbb{o}$ をもつ；

(c) $\exists\mathbb{x}\in\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{x}\neq\mathbb{o})$ s.t. $A\mathbb{x}=\lambda\mathbb{x}$;

(d) λ は固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ の実数解.

- まとめると $\cdots$

定理 1

A : $n \times n$ 行列．次は同値：

(a) λ は A の固有値；

(b) $(\lambda I - A)\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は自明でない解 $\mathbb{x} \neq \mathbb{o}$ をもつ；

(c) $\exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $A\mathbb{x} = \lambda \mathbb{x}$;

(d) λ は固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ の実数解.

定義 (固有空間)

$W_\lambda = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda I - A)\mathbb{x} = \mathbb{o}\} \subset \mathbb{R}^n$: 解空間を
A の固有値 λ に対する固有空間 という.

- まとめると …

定理 1

A : $n \times n$ 行列．次は同値：

(a) λ は A の固有値；

(b) $(\lambda I - A)\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は自明でない解 $\mathbb{x} \neq \mathbb{o}$ をもつ；

(c) $\exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $A\mathbb{x} = \lambda\mathbb{x}$;

(d) λ は固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ の実数解.

定義 (固有空間)

$W_\lambda = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda I - A)\mathbb{x} = \mathbb{o}\} \subset \mathbb{R}^n$: 解空間を

A の固有値 λ に対する固有空間 という.

- $W_\lambda = \{A$ の λ に対する固有ベクトル$\} \cup \{\mathbb{o}\}$

- まとめると ⋯

定理 1

A : $n \times n$ 行列．次は同値：

(a) λ は A の固有値；

(b) $(\lambda I - A)\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は自明でない解 $\mathbb{x} \neq \mathbb{o}$ をもつ；

(c) $\exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $A\mathbb{x} = \lambda \mathbb{x}$;

(d) λ は固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ の実数解.

定義 (固有空間)

$W_\lambda = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda I - A)\mathbb{x} = \mathbb{o}\} \subset \mathbb{R}^n$: 解空間を

A の固有値 λ に対する固有空間 という.

- $W_\lambda = \{A$ の λ に対する固有ベクトル$\} \cup \{\mathbb{o}\}$

注意

固有値，固有ベクトル，固有空間は一般の $V \neq \mathbb{R}^n$ に対して定義できる.

(教 pp. 292～293)

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の (各固有値に対する) 固有空間を求めよ.

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の (各固有値に対する) 固有空間を求めよ.

A の固有方程式

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0$$ より,

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の (各固有値に対する) 固有空間を求めよ.

A の固有方程式

$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5)^2 = 0$ より,

A の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の (各固有値に対する) 固有空間を求めよ.

A の固有方程式

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0 \text{ より,}$$

A の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

$$W_\lambda = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ より,}$$

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の (各固有値に対する) 固有空間を求めよ.

A の固有方程式

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0$$ より,

A の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

$$W_\lambda = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ より,

$$W_1 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

例

$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の (各固有値に対する) 固有空間を求めよ.

A の固有方程式

$$\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5)^2=0 \text{ より},$$

A の固有値は $\lambda=1,5$ (2 重根).

$$W_\lambda=\left\{\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ より},$$

$$W_1=\left\{\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\overset{\text{各自}}{=}\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \mathbf{x}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ (t\in\mathbb{R})\right\}.$$

例

$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の (各固有値に対する) 固有空間を求めよ.

A の固有方程式

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0 \text{ より,}$$

A の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

$$W_\lambda = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ より,}$$

$$W_1 = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{各自}}{=} \left\{ \mathbb{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \mathbb{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (t \in \mathbb{R}) \right\}.$$

$$W_5 = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

例

$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の (各固有値に対する) 固有空間を求めよ.

A の固有方程式

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0 \text{ より,}$$

A の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

$$W_\lambda = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ より,}$$

$$W_1 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{各自}}{=} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (t \in \mathbb{R}) \right\}.$$

$$W_5 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{各自}}{=} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \mathbf{x} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (s, t \in \mathbb{R}) \right\}.$$

例

$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の(各固有値に対する)固有空間を求めよ.

A の固有方程式

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0$$ より,

A の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

$$W_\lambda = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ より,

$$W_1 = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{各自}}{=} \left\{ \mathbb{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \mathbb{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (t \in \mathbb{R}) \right\}.$$

$$W_5 = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{各自}}{=} \left\{ \mathbb{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \mathbb{x} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (s, t \in \mathbb{R}) \right\}.$$

$\therefore\ \dim(W_1) = 1,\ \dim(W_5) = 2.$ (1 次独立な固有ベクトルが 2 つある!)