

# はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス

[LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。  
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

## 6.2 (6.3) 対角化法 (直交対角化法)

### 問

$V$  : 線形空間 (内積空間),  $\dim(V) < \infty$ .

$T : V \rightarrow V$  : 1 次変換に対して,  $T$  の行列が対角行列となる  
 $V$  の基底  $B$  (正規直交基底  $B$ ) は存在するか?

### 問'

$A$  : 正方行列.  $\exists P$  : 可逆 (正則) 行列 (直交行列) s.t.  $P^{-1}AP$  : 対角行列.  
このとき,  $A$  を 対角化可能 (直交対角化可能) という.

▶ 5.4 の定理 5 (と 4.10 の定理 28) より, 問  $\Leftrightarrow$  問' (同値)

## 定理 2 (定理 5)

$A : n \times n$  行列. 次は同値 :

- (a)  $A$  は対角化可能 (直交対角化可能) ;
- (b)  $A$  は  $n$  個の 1 次独立な (正規直交する) 固有ベクトルをもつ.

(証明) (a)  $\Leftrightarrow \exists P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$  は可逆行列 (直交行列) s.t.

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} : \text{対角行列}$$

$\Leftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$  は  $A$  の固有値,  $\mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_n$  は  $A$  の ( $\lambda$  に対する) 固有ベクトル,  $P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$  は可逆行列 (直交行列)  $\Leftrightarrow$  (b).

$$\because P^{-1}AP = D \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow (A\mathbb{p}_1 \cdots A\mathbb{p}_n) = (\lambda_1\mathbb{p}_1 \cdots \lambda_n\mathbb{p}_n). \quad \square$$

## 対角化法 (直交対角化法)

Step 1.  $A$  の 1 次独立な (正規直交する) 固有ベクトル  $\mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_n$  をとる.

Step 2.  $P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$  とする. ( $P$  は可逆行列 (直交行列) となる)

Step 3.  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} : \text{対角行列. } (\lambda_i \text{ は } \mathbb{p}_i \text{ に関する固有値})$

## 例

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

$A$  の固有方程式

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0 \text{ より,}$$

$A$  の固有値は  $\lambda = a$  (2重根). 固有空間

$$W_a = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2 \text{ の基底}$$

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dim(W_a) = 2. \text{ (当然) } A \text{ は対角化可能.}$$

一方で,  $B$  の固有方程式

$$\det(\lambda I - B) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & -1 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0 \text{ より,}$$

$B$  の固有値は  $\lambda = a$  (2重根). 固有空間

$$W_a = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (t \in \mathbb{R}) \right\} \text{ の基底 } \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dim(W_a) = 1.$$

定理 2 から,  $B$  は対角化不可能.

## 応用： $A^n$ を求める

例 (前回の例のつづき)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  の固有値は  $\lambda = 1, 5$  (2重根).

固有空間  $W_1$  の基底  $\mathbb{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $W_5$  の基底  $\mathbb{P}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbb{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$P = (\mathbb{P}_1 \ \mathbb{P}_2 \ \mathbb{P}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  とすれば,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = D$ .

$$\therefore A = PDP^{-1}.$$

$$\begin{aligned} \therefore A^n &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= (\cancel{PDP^{-1}})(\cancel{PDP^{-1}}) \cdots (\cancel{PDP^{-1}})(\cancel{PDP^{-1}}) = PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+5^n) & \frac{1}{2}(1-5^n) & 0 \\ \frac{1}{2}(1-5^n) & \frac{1}{2}(1+5^n) & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 定理 3

$n \times n$  行列  $A$  の相異なる固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  に対する固有ベクトル  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$  は 1 次独立.

(証明) (背理法) 仮に  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$  は 1 次従属と仮定してみる.

$\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_l$  が 1 次独立となる最大の  $1 \leq l < k$  をとる

$\Rightarrow \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{l+1}$  は 1 次従属

$\Rightarrow c_1 \mathbf{p}_1 + \dots + c_{l+1} \mathbf{p}_{l+1} = \mathbf{0}$  ( $\exists (c_1, \dots, c_{l+1}) \neq (0, \dots, 0)$ )  $\cdots$  (1)

$\Rightarrow A(c_1 \mathbf{p}_1 + \dots + c_{l+1} \mathbf{p}_{l+1}) = \mathbf{0}$

$\Rightarrow c_1 \lambda_1 \mathbf{p}_1 + \dots + c_{l+1} \lambda_{l+1} \mathbf{p}_{l+1} = \mathbf{0}$   $\cdots$  (2)

$\Rightarrow c_1 (\lambda_{l+1} - \lambda_1) \mathbf{p}_1 + \dots + c_l (\lambda_{l+1} - \lambda_l) \mathbf{p}_l = \mathbf{0}$   $\cdots$  (1)  $\times \lambda_{l+1} -$  (2)

$\Rightarrow c_1 (\lambda_{l+1} - \lambda_1) = \dots = c_l (\lambda_{l+1} - \lambda_l) = 0$  ( $\because \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_l$  は 1 次独立)

$\Rightarrow c_1 = \dots = c_l = 0$  ( $\because \lambda_i \neq \lambda_j$  ( $i \neq j$ ))

$\Rightarrow c_{l+1} = 0$  ( $\because$  (1) より)  $\Rightarrow$  (1) に矛盾. □

## 定理 4 (定理 3 の系)

$A : n \times n$  行列が  $n$  個の相異なる固有値をもつ  $\Rightarrow A$  は対角化可能.

(証明) 定理 2 + 定理 3. □

▶ 定理 4 の逆 ( $\Leftarrow$ ) は成り立たない

## 定理 2' [(a) $\Leftrightarrow$ (b) は定理 2]

$A : n \times n$  行列. 次は同値 :

(a)  $A$  は対角化可能 ;

(b)  $A$  は  $n$  個の 1 次独立な固有ベクトルをもつ ;

(c)  $A$  の固有方程式の解はすべて実数であり,  
各固有値  $\lambda_i$  ( $k_i$  重根) に対して,  $\dim(W_{\lambda_i}) = k_i$ .

(証明) (c)  $\Rightarrow$  (b) は定理 3 より従う. (b)  $\Rightarrow$  (c) もよい (各自考える). □

### 6.3 直交対角化法；対称行列

#### 定理 6

$A : n \times n$  行列.  $A$  は直交対角化可能  $\Rightarrow A$  は対称行列, i.e.  $A^t = A$ .

(証明)  $P^{-1}AP = D$  (対角行列) かつ  $P^{-1} = P^t$  (直交行列)  
 $\Rightarrow A^t = (PDP^{-1})^t = (PDP^t)^t = PDP^t = PDP^{-1} = A$ . □

#### 注意

実は, 定理 6 の逆 ( $\Leftarrow$ ) も成立. つまり, 対称行列  $A$  の固有方程式の解はすべて実数で, 各固有値  $\lambda_i$  ( $k_i$  重根) に対して,  $\dim(W_{\lambda_i}) = k_i$  (定理 2').

#### 例

対称行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  は直交対角化可能であり, 固有方程式

$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 4)^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$  より,

$\dim(W_4) = 2, \dim(W_1) = 2, \dim(W_2) = 1$ . (各自直接たしかめてみる)



## 定理 7

対称行列  $A$  の固有値  $\lambda \neq \lambda'$ ,  $\mathbf{p} \in W_\lambda, \mathbf{p}' \in W_{\lambda'} \Rightarrow \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}' \rangle = 0$  (直交).

(証明)  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ \vdots \\ p'_n \end{pmatrix}$  に対して,  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p}' \rangle = \mathbf{p}^t \mathbf{p}' = 0$  を示せば

よい.  $1 \times 1$  行列  $(a)$  に対して,  $(a)^t = (a)$  に注意すれば,

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{p}^t \mathbf{p}' &= \lambda (\mathbf{p}'^t \mathbf{p})^t = \lambda (\mathbf{p}'^t \mathbf{p}) = \mathbf{p}'^t (\lambda \mathbf{p}) = \mathbf{p}'^t (A \mathbf{p}) = (\mathbf{p}^t A^t \mathbf{p}')^t \\ &= \mathbf{p}^t A^t \mathbf{p}' = \mathbf{p}^t A \mathbf{p}' = \mathbf{p}^t (\lambda' \mathbf{p}') = \lambda' \mathbf{p}^t \mathbf{p}'. \end{aligned}$$

$$\therefore (\lambda - \lambda') \mathbf{p}^t \mathbf{p}' = 0. \quad \therefore \mathbf{p}^t \mathbf{p}' = 0 \quad (\because \lambda \neq \lambda'). \quad \square$$

## 対称行列 $A$ の直交対角化法

Step 1.  $A$  の各固有空間  $W_{\lambda_i}$  の基底を **グラム・シュミットの正規直交化法** を用いて, 正規直交基底  $\mathbf{p}_{\lambda_i, 1}, \dots, \mathbf{p}_{\lambda_i, k_i}$  ( $\dim(W_{\lambda_i}) = k_i$ ) をもとめる.

Step 2.  $P = (\mathbf{p}_{\lambda_1, 1} \cdots \mathbf{p}_{\lambda_1, k_1} \cdots)$  とする. ( $P$  は **直交行列** となる)

Step 3.  $P^{-1}AP$ : 対角行列となる.

## おまけ：ジョルダン標準形

定義 (ジョルダン細胞)  $\cdots$  Jordan cell

次の形の  $n \times n$  行列を ジョルダン細胞 という：

$$J_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

定理 (ジョルダン標準形)  $\cdots$  Jordan normal form

$A : n \times n$  行列.  $\exists P$  : 可逆行列 s.t.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1, n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_r, n_r} \end{pmatrix}.$$

さらに、ジョルダン細胞の並べ方を除いて一意的に定まる。

- ▶ 対角化可能  $\Leftrightarrow$  ジョルダン標準形のジョルダン細胞が  $n$  個 ( $\forall n_i=1$ )
- ▶  $A \sim B$  (相似)  $\Leftrightarrow$   $A$  と  $B$  のジョルダン標準形は一致