

はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス

[LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

4.7 内積空間

定義 (内積, 内積空間)

V : 線形空間. (一般には, $V \neq \mathbb{R}^n$ に注意)

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に次をみたす $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}$ を対応させる写像を V 上の 内積 という:

- (1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$;
- (2) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$;
- (3) $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ ($k \in \mathbb{R}$) ;
- (4) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

内積をもった (定義された) 線形空間 V を 内積空間 という.

注意

(1)~(4) より, 内積は以下をみたす : (各自確認する)

- (i) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$;
- (ii) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$;
- (iii) $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

例

(1) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$. (ユークリッド内積)

(2) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := 3u_1v_1 + 2u_2v_2$.

(3) $V = M_{2,2} \ni A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$,
 $\langle A, B \rangle := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$.

(4) $V = \mathbb{R}[X]_2 \ni p = a_0 + a_1X + a_2X^2, q = b_0 + b_1X + b_2X^2$,
 $\langle p, q \rangle := a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$.

(5) $V = \mathbb{R}[X]_n \ni p(x), q(x), \langle p(x), q(x) \rangle := \int_b^a p(x)q(x)dx$.

定理 15 (コーシー・シュワルツの不等式)

V : 内積空間. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$.

(証明) $t \in \mathbb{R}$. $0 \leq \langle t\mathbf{u} + \mathbf{v}, t\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle t^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = at^2 + bt + c$ より, $b^2 - 4ac \leq 0$. $\therefore \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$. \square

例

$V = \mathbb{R}^n$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$. (ユークリッド内積)

$(u_1v_1 + \cdots + u_nv_n)^2 \leq (u_1^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + \cdots + v_n^2)$: コーシーの不等式

4.8 内積空間における「長さ」「角」

定義 (ノルム, 距離)

V : 内積空間.

$u \in V$ のノルム $\|u\| := \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$

$u, v \in V$ の間の距離 $d(u, v) := \|u - v\|$. (距離 \cdots distance)

注意

内積空間 V に与えられた内積 $\langle u, v \rangle$ ごとにノルムと距離が定まる.

例

$V = \mathbb{R}^n$, $\langle u, v \rangle := u \cdot v = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$: ユークリッド内積.

$\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$: ユークリッドノルム.

$d(u, v) = \|u - v\| = \langle u - v, u - v \rangle^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$: ユークリッド距離.

定理 16

長さ

- (1) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$;
- (2) $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$;
- (3) $\|k\mathbf{u}\| = |k| \cdot \|\mathbf{u}\|$;
- (4) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$;

距離

- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$;
- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$;
- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$;
- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.

(証明) 略. (教 pp.206~207) (特に, (4) は 3角不等式 とよばれる)

コーシー・シュワルツの不等式より,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2. \text{ よって, } \left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \right)^2 \leq 1.$$

$$\therefore -1 \leq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \leq 1 \text{ より, } \cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \text{ (} 0 \leq \exists \theta \leq \pi \text{)}.$$

▶ この θ を \mathbf{u} と \mathbf{v} のなす角 という

定義 (直交)

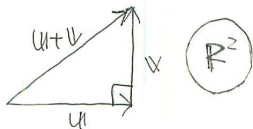
$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \text{ が } \underline{\text{直交}} \stackrel{\text{def}}{\iff} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \text{ (} \iff \theta = \frac{\pi}{2} \text{)}.$$

定理 17 (一般化されたピタゴラスの定理)

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \Rightarrow \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

$$\begin{aligned} \text{(証明)} \quad \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2 \cdot 0 + \|\mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

□



4.9 直交基底；グラム・シュミットの方法

定義 (直交集合, 正規直交集合)

V : 内積空間. (内積 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ が定義された線形空間)

$S \subset V$: 直交集合 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \ (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S, \mathbf{u} \neq \mathbf{v})$

$S \subset V$: 正規直交集合 $\stackrel{\text{def}}{\iff} S$ は直交集合かつ $\|\mathbf{u}\| = 1 \ (\forall \mathbf{u} \in S)$.

▶ “正規” $\leftrightarrow \|\mathbf{u}\| = 1 \leftrightarrow$ “ノルム = 1”

例

$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \mathbf{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{R}^3$.

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ は正規直交集合.

$\therefore \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 0$ かつ $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_3\| = 1$.

例

$\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$ に対して, $\mathbf{v}' := \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ とすれば, $\|\mathbf{v}'\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \|\mathbf{v}\| = 1$.

▶ \mathbf{v} から “ノルム = 1” の \mathbf{v}' を作ることを 正規化 という