線形代数 IIA（第 11 回・2023/5/18）小テスト

在籍番号		氏名	

[1] **(定義)** V, W を線形空間とする．写像 $F : V \to W$ が**線形写像**とは，

(i) $F(\mathbb{u}+\mathbb{v}) = \boxed{}$ $(\forall \mathbb{u}, \mathbb{v} \in V)$ (1);

(ii) $F(k\,\mathbb{u}) = \boxed{}$ $(\forall k \in \mathbb{R}, \forall \mathbb{u} \in V)$ (2)

を満たすこと．定義から，線形写像 F は $F(\mathbb{o}) = \boxed{}$ (3) を満たすことが分かる．

特に，$V = W$ のとき線形写像 F を V 上の $\boxed{}$ (4) という．

[2] 次の $\boxed{}$ に $\boxed{\text{ある}}$ または $\boxed{\text{ない}}$ を入れよ．

(1) 写像 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix}$ は線形写像で $\boxed{}$.

(2) 写像 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x+1 \\ x \end{pmatrix}$ は線形写像で $\boxed{}$.

(3) 写像 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$ は線形写像で $\boxed{}$.

(4) 写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y+z \\ x+y-z \\ 0 \\ xyz \end{pmatrix}$ は線形写像で $\boxed{}$

[3] (定義) V, W を線形空間，$T : V \to W$ を線形写像とする．

(1) $\mathrm{Ker}(T) := \{\mathbb{v} \in V \mid T(\mathbb{v}) = \mathbb{o}\} \subset V$ を T の $\boxed{}$ (kernel) という．

(2) $\mathrm{Im}(T) := \{T(\mathbb{v}) \mid \mathbb{v} \in V\} \subset W$ を T の $\boxed{}$ (image) という．

例えば，$T : V \to W$, $\mathbb{v} \mapsto \mathbb{o}$: **ゼロ写像**に対して，$\mathrm{Ker}(T) = V$, $\mathrm{Im}(T) = \{\mathbb{o}\}$.

※ $\mathbb{o}$ と $\{\mathbb{o}\}$ は違うので注意すること．$\mathbb{o}$ はゼロ・ベクトルという**元**，$\{\mathbb{o}\}$ は**集合**である．