

線形代数IIA (第13回・2023/5/25) 小テスト

在籍番号		氏名	
------	--	----	--

[1] (定義) V, W を線形空間, $T : V \rightarrow W$ を線形写像とする.

$\text{rank}(T) := \dim(\text{Im}(T))$ を T の (1),

$\text{nullity}(T) := \dim(\text{Ker}(T))$ を T の (2) という.

ちなみに, Null は (3) では, 0 という意味がある.

たとえば, $T = T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ (A は $m \times n$ 行列) に対して,

$\text{rank}(T_A) = \dim(\text{Im}(T_A)) \stackrel{\text{定理 14}}{=} \dim(C(A)) = \text{rank}(A) = \text{rank}(A^T) = \dim(C(A^T)) = \dim(\text{Im}(T_{A^T}))$ (4),

$\text{nullity}(T_A) = \dim(\text{Ker}(T_A)) = \dim(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\})$.

すなわち, 連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の (5) となる.

[2] (定理 3 : 次元定理) V, W を線形空間, $T : V \rightarrow W$: 線形写像, $\dim(V) = n$

$\Rightarrow \text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = \dim(V) = n$ (1).

特に, $m \times n$ 行列 A に対して,

連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間の次元は (2) がわかる.

[3] $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ に対して, $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T) = \text{rank}(A + A^T) = \text{rank}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ (1) である. よって, 次元定理と

その系から連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間 W の次元は, $\dim W = \dim(V) - \text{rank}(A) = 4 - 1 = 3$ (2) とわかる.

[4] $T : V \rightarrow W$: 線形写像, $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} : V$ の基底, $B' = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\} : W$ の基底とする.

$[T(\mathbf{x})]_{B'} = A[\mathbf{x}]_B$ をみたす $m \times n$ 行列 $A = ([T(\mathbf{v}_1)]_{B'} \cdots [T(\mathbf{v}_n)]_{B'})$ を

基底 B, B' に関する T の行列という.

特に, T が1次変換 ($V = W$) で $B = B'$ のとき, (単に) という.