

線形代数 IIA (第6回・2023/4/24) 小テスト

在籍番号		氏名	
------	--	----	--

[1] (定理 7) V を線形空間, $v_1, \dots, v_n \in V$ を V の基底とする.

このとき, V の 個以上のベクトルは 1 次従属となる

(ただし, 答えの候補の内最小のものを答えること).

対偶を取れば, V のベクトルが 1 次独立ならば, その個数は n 個以下である.

これを用いると, 次の定理が従う:

(定理 8) 有限次元の線形空間の基底は, 常に一定の個数のベクトルからなる.

[2] (定義) V を線形空間, $v_1, \dots, v_n \in V$ を V の基底とする.

このとき, (1) V の次元 (dimension) は であるといい, $\dim V$ とかく.

(2) 線形空間 $\{0\}$ の次元は と定める.

例えば, (3) $\dim \mathbb{R}^n =$, (4) $\dim \mathbb{R}[X]_n =$,

(5) $\dim \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} =$, (6) $\dim \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} =$.

但し, $\mathbb{R}[X]_n$ は n 次以下の実数係数の多項式全体のなす線形空間とする.

[3] 連立方程式

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

の解空間を W とすれば, $\dim W =$ となる.

[4] (定義) $m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ に対して, } j \text{ 列からなるベクトル } \mathbf{c}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ を列ベクトル,}$$

i 行からなるベクトル $\mathbf{r}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ を行ベクトル,

(1) $R(A) = \text{Span}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m) \subset \mathbb{R}^n$ を A の ,

(2) $C(A) = \text{Span}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n) \subset \mathbb{R}^m$ を A の という