

はじめに (数学基礎 B1)

数学基礎 B = 線形代数

教科書「要点明解 線形数学 三訂版」培風館

(第1章 ベクトル)

▶ 第2章 行列

▶ 第3章 連立1次方程式

(第4章 行列式)

(第5章 行列の対角化)

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス

LINK

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

例 (基本変形)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) A の 1 行目と 2 行目を入れ替える：
$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

(2) A の 1 行目を 3 倍する：
$$\begin{pmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(3) A の 2 行目の 2 倍を 1 行目に加える：
$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{21} & a_{12} + 2a_{22} & a_{13} + 2a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

例 (基本変形)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) A の 1 行目と 2 行目を入れ替える : $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = BA.$

(2) A の 1 行目を 3 倍する : $\begin{pmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = CA.$

(3) A の 2 行目の 2 倍を 1 行目に加える : $\begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{21} & a_{12} + 2a_{22} & a_{13} + 2a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = DA.$

例 (基本変形)

このような3つの操作

- (1) A の i 行目と j 行目を入れ替える
 - (2) A の i 行目を k 倍する
 - (3) A の i 行目の k 倍を j 行目に加える
- を (行) 基本変形 という.

基本変形に対応して左からかけた (B, C, D のような) 行列を 基本行列 という.

定理 2.5 (ハミルトン・ケーリーの定理)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ に対し, } A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E_2 = \mathbf{O}.$$

$$\begin{aligned} & \because A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E_2 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+da & ab+db \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}. \quad \square \end{aligned}$$

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ に対して, A^{10} を求めよ.

ハミルトン・ケリーの定理より, $A^2 - 5A + 6E_2 = \mathbf{O}$.

$$\begin{cases} A^{10} \rightarrow x^{10} =: f(x) \\ A^2 - 5A + 6E_2 \rightarrow x^2 - 5x + 6 =: b(x) \end{cases}$$

とし, $f(x) = q(x)b(x) + r(x) = q(x)(x^2 - 5x + 6) + sx + t \cdots (1)$

の余り $r(x) = sx + t$ をもとめると, $b(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

より, (1) に $x = 2, 3$ を代入して,

$$\begin{cases} 2^{10} = 2s + t, \\ 3^{10} = 3s + t. \end{cases}$$

これを解いて, $s = 3^{10} - 2^{10} = 59049 - 1024 = 58025$,

$t = 2^{10} - 2s = 2^{10} - 2 \times 58025 = -115026$. ここで, x に A を代入すれば,

$$\begin{aligned} & A^2 - 5A + 6E_2 = \mathbf{O} \text{ より, } A^{10} = \mathbf{O} + sA + tE_2 \\ & = 58025 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 115026 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -57001 & 116050 \\ -58025 & 117074 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

定義 (2次形式)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \text{ を}$$

x, y に関する 2次形式 という.

例

$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 3$ で表される図形を求める。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ に対して,}$$

2次形式 $3x^2 - 2xy + 3y^2 = (x \ y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$.

ここで,

$$P = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

とすると, P は正則行列. (P は回転行列とよばれる)

実際, $P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ が確認できる. このとき,

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} =: B \text{ (対角行列) となる.}$$

例

ここで, (x, y) 座標 $\rightarrow (x', y')$ 座標を

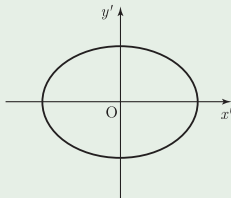
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P\mathbf{x}' \quad \text{すなわち, } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定義する. (x, y) 座標は (x', y') 座標を 反時計回りに $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ 回転 した
ものとなる. このとき,

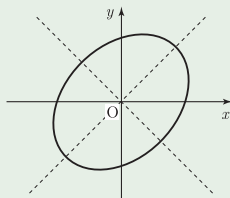
$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (P\mathbf{x}')^T A (P\mathbf{x}') = \mathbf{x}'^T P^T A P \mathbf{x}'$$

$$= \mathbf{x}'^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}' = 2x'^2 + 4y'^2. \quad \text{すなわち, 新しい座標系 } (x', y') \text{ では}$$

$$2x'^2 + 4y'^2 = 3 \iff \frac{2}{3}x'^2 + \frac{4}{3}y'^2 = 1 \text{ (楕円) となる:}$$



$$2x'^2 + 4y'^2 = 3$$



$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 3$$