はじめに　(数学基礎 B1)

$\boxed{\text{数学基礎 B} \quad = \quad \text{線形代数}}$

教科書「要点明解　線形数学　三訂版」培風館

(第１章　ベクトル)
- 第２章　行列
- 第３章　連立１次方程式

(第４章　行列式)
(第５章　行列の対角化)

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

定理

全ての $m \times n$ 行列は (行) 基本変形を何回か行ってガウス行列にできる.

(証明) $A = \boldsymbol{O}$ (零行列) はガウス行列. $A \neq \boldsymbol{O}$ のとき, A を第 1 列 (左) から順にみて最初の零ベクトルでない列を n_1 列とする. 基本変形 I で行を交換, II で (k 倍して) 一番上を 1 に, III で 1 の下をすべて 0 にできる. この操作を $(1, n_1)$ 成分を中心として第 n_1 列を 掃き出す という.
これを繰り返していけば, ガウス行列をえる. □

- このようにしてガウス行列を求める方法を 掃き出し法 という.

例

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$ を掃き出し法でガウス行列にする.

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \downarrow\times(-3) \xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{0} & 8 & -8 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \downarrow\times(-5) \xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & \mathbf{0} & 8 & -8 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \downarrow\times(-2)$$

$$\xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & \mathbf{0} & 8 & -8 \end{pmatrix} \times\frac{1}{8} \xrightarrow{\boxed{\text{II}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \uparrow\times 1 \xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \downarrow\times(-8)$$

$$\xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \downarrow\times(-8) \xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$$ $\cdots$ ガウス行列

定義 (階数)

行列 A を行基本変形して**ガウス行列**にしたときの**初 1** の数 (階段の数) を A の **階数** (rank) といい，$\mathrm{rank}(A)$ とあらわす．

例

上の例より，

$$\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2.$$

また，以前の例より

$$\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 2.$$

$$\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right) = 3.$$

注意

行列 A の**階数** $\mathrm{rank}(A)$ は行基本変形では変化しない.

注意

A : $m \times n$ 行列 $\Rightarrow \mathrm{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$.
但し，$\min\{m, n\}$ は m と n の最小値 (minimum) をあらわす.

3.3 連立 1 次方程式

より一般には,

連立 1 次方程式
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \cdots(1)$$

を解く必要がでてくる. (1) は, 行列をもちいて

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ に対して,

$$\boxed{A\mathbb{x} = \mathbb{b}}$$

と表せる. 行列 A を連立 1 次方程式 (1) の 係数行列, A の最後の列に $\mathbb{b}$ を付け加えた $m \times (n+1)$ 行列 $\overline{A} = (A \mid \mathbb{b})$ を 拡大係数行列 という.