

# はじめに (数学基礎 B1)

数学基礎 B = 線形代数

教科書「要点明解 線形数学 三訂版」培風館

(第1章 ベクトル)

▶ 第2章 行列

▶ **第3章 連立1次方程式**

(第4章 行列式)

(第5章 行列の対角化)

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス

LINK

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。  
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

### 3.3 連立1次方程式

**復習** より一般には、

$$\text{連立1次方程式} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \cdots(1)$$

を解く必要がでてくる。(1)は、行列をもちいて

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{に対して,}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

と表せる。行列  $A$  を連立1次方程式(1)の **係数行列**、 $A$ の最後の列に  $\mathbf{b}$  を付け加えた  $m \times (n+1)$  行列  $\overline{A} = (A \mid \mathbf{b})$  を **拡大係数行列** という。

拡大係数行列  $\overline{A} = (A | \mathbf{b})$  に行基本変形を何回か行って

$$\left( \begin{array}{cccccccccccc|c} & & & \text{第} & & & & \text{第} & & & \text{第} & & & \text{第} \\ & & & n_1 & \cdots & & & n_2 & \cdots & & n_r & \cdots & & n+1 \\ & & & \text{列} & & & & \text{列} & & & \text{列} & & & \text{列} \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & * & \cdots & * & 0 & & & 0 & & & d_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & & & 0 & & & d_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \star & \vdots & & \star & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & d_{r+1} \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & d_m \end{array} \right)$$

とできる. (左側の  $A$  を **ガウス行列** に変形した)

ここで  $x_{n_1} \rightarrow y_1, x_{n_2} \rightarrow y_2, \dots, x_{n_r} \rightarrow y_r$

それ以外の  $x_j$  ( $j \neq n_1, \dots, n_r$ ) は順に  $y_{r+1}, \dots, y_n$  とする.

これにより, 次の連立1次方程式をえる:



## 定理 3.1

連立 1 次方程式 (1) が解をもつ  $\iff \text{rank}(A) = \text{rank}(\bar{A})$ .

### 例

文字  $a$  を含む連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 3z = a \end{cases} \text{ を解く.} \quad \bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & a \end{array} \right).$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & a \end{array} \right) \begin{array}{l} \downarrow \times(-2) \\ \text{III} \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ \color{red}{0} & -3 & -3 & -18 \\ 3 & 0 & 3 & a \end{array} \right) \begin{array}{l} \downarrow \times(-3) \\ \text{III} \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -18 \\ \color{red}{0} & -3 & -3 & a-27 \end{array} \right) \times(-\frac{1}{3})$$

$$\begin{array}{l} \text{II} \\ \rightarrow \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & a-27 \end{array} \right) \begin{array}{l} \downarrow \times 3 \\ \text{III} \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \color{red}{0} & 0 & a-9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \times(-1) \\ \text{III} \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & a-9 \end{array} \right)$$

$\therefore a \neq 9$  のとき, **解なし**.  $a = 9$  のとき,  $\begin{cases} x + z = 3 \\ y + z = 6 \end{cases}$  より,

解は  $x = 3 - t, y = 6 - t, z = t$  ( $t$  は任意の実数).

## 応用 ( $A^{-1}$ を求める)

▶ 行列  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を求める！

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{matrix} ? & ? & ? \end{matrix}$$

基本ベクトル  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  に対して,

$$A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3) \text{ を考える. それぞれ解 } \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{pmatrix}$$

$$\text{をもったとすると, } A \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1, \quad A \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \mathbf{e}_2, \quad A \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{e}_3 .$$

$$\text{これをまとめてかくと, } A \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

$$\text{つまり, } A \text{ の逆行列 } A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \text{ がえられた.}$$

$A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$  を **3つ同時に解く**。それには、

$$\left( A \mid \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ を (行) 基本変形して, } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & B \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right)$$

とすれば、解  $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$  が **同時に**えられる。

### 定理 3.2

$A$  :  $n$  次正方行列.  $A$  が正則のとき、(行) 基本変形によって  
 $(A \mid E) \rightarrow \cdots \rightarrow \cdots \rightarrow (E \mid B)$  (但し、 $E = E_n$  は  $n$  次単位行列)  
とすれば、 $B = A^{-1}$  として行列  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  が求まる。

### 注意

$A$  が正則  $\Rightarrow (A \mid E) \rightarrow \cdots \rightarrow \cdots \rightarrow (E \mid B)$  とできる。  
すなわち、左側を単位行列  $E$  にできない  $\Rightarrow A$  は正則でない。

▶ 最初の問題に戻ると …

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \quad ? \quad ? \quad ?$$

(行) 基本変形を行うと

$$\left( \begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 0 \\ A & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \cdots \rightarrow \cdots \rightarrow \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \middle| B \right) \text{ として,}$$

(行基本変形を各自行う. 教 p.65 も参考に)

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ をえる.}$$

▶ 検算が必要 !!! (特に試験時)

それには …  $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$  を実際に計算して確かめる.