

# はじめに (数学基礎 B2)

数学基礎 B = 線形代数

教科書 「要点明解 線形数学」 培風館

(第1章 ベクトル)

(第2章 行列)

(第3章 連立1次方程式)

▶ 第4章 行列式

▶ 第5章 行列の対角化

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。  
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

## 第5章 行列の対角化

### 定義

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  を  $n$ 次元数ベクトル という。

$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} (i = 1, \dots, n) \right\}$  :  $n$ 次元数ベクトル空間 という。

### 定義 (対角行列)

正方行列  $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$  を 対角行列 という。

## 行列の対角化

正方行列  $A$  に対して、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$  : 対角行列 … (1)

なる正則行列  $P$  を見つけたい! …  $P$  があるとき、 $A$  は 対角化可能 という  
(→ 例 2.25 (教 p.46) の 2 次形式と楕円の回転の例を参照)

$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbb{P}_1 & \cdots & \mathbb{P}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$  とすると、(1) は

$A \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbb{P}_1 & \cdots & \mathbb{P}_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbb{P}_1 & \cdots & \mathbb{P}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$  とできる.

よって、 $\begin{pmatrix} | & & | \\ A\mathbb{P}_1 & \cdots & A\mathbb{P}_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1\mathbb{P}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbb{P}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ .

つまり、 $A\mathbb{P}_1 = \lambda_1\mathbb{P}_1, \dots, A\mathbb{P}_n = \lambda_n\mathbb{P}_n$  となる.

▶  $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  とする.

## 定義 (固有値, 固有ベクトル, 固有空間)

$A : n \times n$  行列.

$$A \mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}$$

なる  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  ( $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ ) が存在するとき,

$\lambda \in \mathbb{R}$  を  $A$  の 固有値,

$\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$  を固有値  $\lambda$  に対する  $A$  の 固有ベクトル,

$W_\lambda = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid A \mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}\}$  を固有値  $\lambda$  に対する  $A$  の 固有空間 という.

## 注意

$W_\lambda = \{\text{固有値 } \lambda \text{ に関する } A \text{ の固有ベクトル } \mathbf{p}\} \cup \{\mathbf{0}\}.$

## 定理 5.1

$A : n \times n$  行列.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n : A$  の固有値 (重複を許す),

$\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n : \text{それぞれ } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ に対する固有ベクトル}$

$P = (\mathbb{P}_1 \cdots \mathbb{P}_n)$  が正則 ( $|P| \neq 0$ ) を仮定

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} : \text{対角化可能.}$$

## 注意

$\lambda \in \mathbb{R}$  が  $A$  の固有値

定義  $\Leftrightarrow A\mathbb{P} = \lambda\mathbb{P}$  なる  $\mathbb{P} \neq \mathbf{0}$  が存在

$\Leftrightarrow (\lambda E - A)\mathbb{P} = \mathbf{0}$  の解  $\mathbb{P} \neq \mathbf{0}$  がある

$\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$

$\Leftrightarrow \lambda$  は  $t$  に関する  $n$  次方程式  $f_A(t) = |tE - A| = 0$  の解.

▶  $f_A(t)$  を 固有多項式,  $f_A(t) = 0$  を 固有方程式 という

# 例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  の固有値, 固有ベクトルを (すべて) 求めよ.

$A$  の固有方程式

$$f_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -3 \\ 0 & t-2 & -3 \\ 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t-3) = 0$$

の解  $t = 1, 2, 3$  が  $A$  の固有値.

固有値  $\lambda$  に対する固有ベクトル  $\mathbf{p}$  は  $(\lambda E - A)\mathbf{p} = \mathbf{0}$  の解  $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$  であり,

$\lambda = 1$  のとき,  $\begin{pmatrix} 1-1 & -2 & -3 \\ 0 & 1-2 & -3 \\ 0 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  を解いて,

固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ( $s \neq 0$ ).

## 例 (つづき)

$\lambda = 2$  のとき, 
$$\begin{pmatrix} 2-1 & -2 & -3 \\ 0 & 2-2 & -3 \\ 0 & 0 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 を解いて,

固有ベクトルは 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0).$$

$\lambda = 3$  のとき, 
$$\begin{pmatrix} 3-1 & -2 & -3 \\ 0 & 3-2 & -3 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 を解いて,

固有ベクトルは 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}u \\ 3u \\ u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (u \neq 0).$$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$