はじめに　(数学基礎 B2)

$\boxed{\text{数学基礎 B} \quad = \quad \text{線形代数}}$

教科書　「要点明解 線形数学」培風館

(第 1 章　ベクトル)
(第 2 章　行列)
(第 3 章　連立 1 次方程式)

- 第 4 章　行列式
- 第 5 章　行列の対角化

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 ⟶ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

命題

A : n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$: A の固有多項式とする．

(1) $f_{P^{-1}AP}(t) = f_A(t)$;

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(t) = (t - \lambda_1)\cdots(t - \lambda_n)$.

命題

A : n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$: A の固有多項式とする．

(1) $f_{P^{-1}AP}(t) = f_A(t)$;

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$.

$\because$ (1) $|AB| = |A|\,|B|$ と $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ より，

命題

A : n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$: A の固有多項式とする.

(1) $f_{P^{-1}AP}(t) = f_A(t)$;

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(t) = (t - \lambda_1)\cdots(t - \lambda_n)$.

$\because$ (1) $|AB| = |A|\,|B|$ と $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ より，$f_{P^{-1}AP}(t) = |t\,E - P^{-1}AP|$

命題

A : n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$: A の固有多項式とする.

(1) $f_{P^{-1}AP}(t) = f_A(t)$;

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$.

$\because$ (1) $|AB| = |A|\,|B|$ と $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ より，$f_{P^{-1}AP}(t) = |t\,E - P^{-1}AP|$

$= |P^{-1}(t\,E - A)P|$

命題

A : n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$: A の固有多項式とする．

(1) $f_{P^{-1}AP}(t) = f_A(t)$;

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(t) = (t - \lambda_1)\cdots(t - \lambda_n)$.

$\because$ (1) $|AB| = |A|\,|B|$ と $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ より，$f_{P^{-1}AP}(t) = |t\,E - P^{-1}AP|$

$= |P^{-1}(t\,E - A)P| = |P^{-1}|\,|t\,E - A|\,|P|$

命題

A : n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$: A の固有多項式とする．

(1) $f_{P^{-1}AP}(t) = f_A(t)$;

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(t) = (t - \lambda_1)\cdots(t - \lambda_n)$.

$\because$ (1) $|AB| = |A|\,|B|$ と $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ より，$f_{P^{-1}AP}(t) = |t\,E - P^{-1}AP|$

$$= |P^{-1}(t\,E - A)P| = |P^{-1}|\,|t\,E - A|\,|P| = \frac{1}{\cancel{|P|}}\,|t\,E - A|\,\cancel{|P|}$$

命題

A : n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$: A の固有多項式とする．

(1) $f_{P^{-1}AP}(t) = f_A(t)$;

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$.

$\because$ (1) $|AB| = |A|\,|B|$ と $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ より，$f_{P^{-1}AP}(t) = |t\,E - P^{-1}AP|$

$= |P^{-1}(t\,E - A)P| = |P^{-1}|\,|t\,E - A|\,|P| = \dfrac{1}{\cancel{|P|}}\,|t\,E - A|\,\cancel{|P|} = |t\,E - A|$

命題

A：n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$：A の固有多項式とする．
(1) $f_{P^{-1}AP}(t) = f_A(t)$;
(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(t) = (t - \lambda_1)\cdots(t - \lambda_n)$.

$\because$ (1) $|AB| = |A|\,|B|$ と $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ より，$f_{P^{-1}AP}(t) = |t\,E - P^{-1}AP|$

$= |P^{-1}(t\,E - A)P| = |P^{-1}|\,|t\,E - A|\,|P| = \dfrac{1}{\cancel{|P|}}\,|t\,E - A|\,\cancel{|P|} = |t\,E - A|$

$= f_A(t)$.

命題

A：n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$：A の固有多項式とする．

(1) $f_{P^{-1}AP}(t) = f_A(t)$;

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(t) = (t - \lambda_1)\cdots(t - \lambda_n)$.

$\because$ (1) $|AB| = |A|\,|B|$ と $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ より，$f_{P^{-1}AP}(t) = |t\,E - P^{-1}AP|$

$= |P^{-1}(t\,E - A)P| = |P^{-1}|\,|t\,E - A|\,|P| = \dfrac{1}{\cancel{|P|}}\,|t\,E - A|\,\cancel{|P|} = |t\,E - A|$

$= f_A(t)$. (2) も (1) より OK.

命題

A : n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$: A の固有多項式とする．

(1) $f_{P^{-1}AP}(t) = f_A(t)$;

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$.

$\because$ (1) $|AB| = |A|\,|B|$ と $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ より，$f_{P^{-1}AP}(t) = |t\,E - P^{-1}AP|$
$= |P^{-1}(t\,E - A)P| = |P^{-1}|\,|t\,E - A|\,|P| = \dfrac{1}{\cancel{|P|}}\,|t\,E - A|\,\cancel{|P|} = |t\,E - A|$
$= f_A(t)$. (2) も (1) より OK.

- A が対角化可能

命題

A : n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$: A の固有多項式とする．
(1) $f_{P^{-1}AP}(t) = f_A(t)$;

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$.

$\because$ (1) $|AB| = |A|\,|B|$ と $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ より，$f_{P^{-1}AP}(t) = |t\,E - P^{-1}AP|$
$= |P^{-1}(t\,E - A)P| = |P^{-1}|\,|t\,E - A|\,|P| = \dfrac{1}{\cancel{|P|}}|t\,E - A|\,\cancel{|P|} = |t\,E - A|$
$= f_A(t)$. (2) も (1) より OK.

- A が対角化可能 $\Rightarrow f_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_k)^{n_k}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$: 重複なし)

命題

A : n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$: A の固有多項式とする．

(1) $f_{P^{-1}AP}(t) = f_A(t)$;

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(t) = (t - \lambda_1)\cdots(t - \lambda_n)$.

$\because$ (1) $|AB| = |A|\,|B|$ と $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ より，$f_{P^{-1}AP}(t) = |t\,E - P^{-1}AP|$

$= |P^{-1}(t\,E - A)P| = |P^{-1}|\,|t\,E - A|\,|P| = \dfrac{1}{\cancel{|P|}}|t\,E - A|\,\cancel{|P|} = |t\,E - A|$

$= f_A(t)$. (2) も (1) より OK.

- A が対角化可能 $\Rightarrow f_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1}\cdots(t - \lambda_k)^{n_k}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$: 重複なし) ($f_A(t) = 0$ は (重複度込みで) n 個の実数解をもつ : $n = n_1 + \cdots + n_k$)

命題

A：n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$：A の固有多項式とする．

(1) $f_{\color{red}{P^{-1}AP}}(t) = f_A(t)$;

(2) $\color{red}{P^{-1}}A\color{red}{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$.

$\because$ (1) $|AB| = |A|\,|B|$ と $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ より，$f_{P^{-1}AP}(t) = |t\,E - P^{-1}AP|$

$= |P^{-1}(t\,E - A)P| = |P^{-1}|\,|t\,E - A|\,|P| = \dfrac{1}{\cancel{|P|}}\,|t\,E - A|\,|\cancel{P}| = |t\,E - A|$

$= f_A(t)$. (2) も (1) より OK.

- A が対角化可能 $\Rightarrow f_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_k)^{n_k}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$：重複なし)
  ($f_A(t) = 0$ は (重複度込みで) n 個の実数解をもつ：$n = n_1 + \cdots + n_k$)
- 逆に，

命題

A：n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$：A の固有多項式とする．
(1) $f_{P^{-1}AP}(t) = f_A(t)$;
(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$.

$\because$ (1) $|AB| = |A|\,|B|$ と $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ より，$f_{P^{-1}AP}(t) = |t\,E - P^{-1}AP|$
$= |P^{-1}(t\,E - A)P| = |P^{-1}|\,|t\,E - A|\,|P| = \dfrac{1}{\cancel{|P|}}|t\,E - A|\,\cancel{|P|} = |t\,E - A|$
$= f_A(t)$. (2) も (1) より OK.

- A が対角化可能 $\Rightarrow f_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_k)^{n_k}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$：重複なし)
($f_A(t) = 0$ は (重複度込みで) n 個の実数解をもつ：$n = n_1 + \cdots + n_k$)
- 逆に，各固有値 λ_i に対して，$(A - \lambda_i E)\,\mathbb{p}_{i,j} = \mathbb{o}$ なる固有ベクトル $\mathbb{p}_{i,1}, \ldots, \mathbb{p}_{i,n_i}$ が λ_i の重複度分 n_i 個存在して，各 $\mathbb{p}_{i,j}$ を並べた行列 P が正則 ($|P| \neq 0$) ならば，A は対角化可能.

定理 5.2

A：n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$：A の固有多項式とする.
$f_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_k)^{n_k}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$：重複なし),
$\mathrm{rank}(A - \lambda_i\,E) = n - n_i$ $(1 \leq i \leq k)$
$\Rightarrow$ A は対角化可能.

定理 5.2

A : n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$: A の固有多項式とする．
$f_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_k)^{n_k}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$: 重複なし),
$\mathrm{rank}(A - \lambda_i\,E) = n - n_i$ $(1 \le i \le k)$
$\Rightarrow$ A は対角化可能.

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

定理 5.2

A : n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$: A の固有多項式とする．
$f_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_k)^{n_k}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$: 重複なし),
$\mathrm{rank}(A - \lambda_i\,E) = n - n_i$ $(1 \leq i \leq k)$
$\Rightarrow$ A は対角化可能.

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A の固有多項式

$$f_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -3 & -2 \\ -2 & t-2 & -2 \\ -3 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = t(t+1)(t-6).$$

定理 5.2

A : n 次正方行列, $f_A(t) = |t\,E - A|$: A の固有多項式とする.
$f_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_k)^{n_k}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$: 重複なし),
$\mathrm{rank}(A - \lambda_i\,E) = n - n_i$ $(1 \leq i \leq k)$
$\Rightarrow$ A は対角化可能.

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. A の固有多項式

$$f_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -3 & -2 \\ -2 & t-2 & -2 \\ -3 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = t(t+1)(t-6).$$

A の固有値 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 6$.

定理 5.2

A : n 次正方行列, $f_A(t) = |t\,E - A|$: A の固有多項式とする.
$f_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_k)^{n_k}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$: 重複なし),
$\mathrm{rank}(A - \lambda_i\,E) = n - n_i$ $(1 \leq i \leq k)$
$\Rightarrow$ A は対角化可能.

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. A の固有多項式

$$f_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -3 & -2 \\ -2 & t-2 & -2 \\ -3 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = t(t+1)(t-6).$$

A の固有値 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 6$.
$\mathrm{rank}(A - 0 \cdot E) = 2$, $\mathrm{rank}(A - (-1) \cdot E) = 2$, $\mathrm{rank}(A - 6 \cdot E) = 2$.

定理 5.2

A : n 次正方行列，$f_A(t) = |t\,E - A|$: A の固有多項式とする．
$f_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_k)^{n_k}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$: 重複なし),
$\mathrm{rank}(A - \lambda_i\,E) = n - n_i$ $(1 \leq i \leq k)$
$\Rightarrow$ A は対角化可能.

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$ A の固有多項式

$$f_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -3 & -2 \\ -2 & t-2 & -2 \\ -3 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = t(t+1)(t-6).$$

A の固有値 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 6$.
$\mathrm{rank}(A - 0\cdot E) = 2$, $\mathrm{rank}(A - (-1)\cdot E) = 2$, $\mathrm{rank}(A - 6\cdot E) = 2$.
定理 5.2 より，A は対角化可能．（各自，確認する）

- 次に，$P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる P を選べる場合について考える

- 次に，$P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる P を選べる場合について考える

定義

$P^{\mathrm{T}}P = E_n$ となる正方行列 P を 直交行列 という．

- 次に，$P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる P を選べる場合について考える

定義

$P^{\mathrm{T}}P = E_n$ となる正方行列 P を <u>直交行列</u> という． $\cdots$ $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる

- 次に，$P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる P を選べる場合について考える

定義

$P^{\mathrm{T}}P = E_n$ となる正方行列 P を 直交行列 という． $\cdots$ $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる

定義

$A : n \times n$ 行列.

- 次に，$P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる P を選べる場合について考える

定義

$P^{\mathrm{T}}P = E_n$ となる正方行列 P を 直交行列 という． $\cdots$ $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる

定義

A : $n \times n$ 行列．

A : 直交対角化可能 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 直交行列 P で $P^{-1}AP$ を対角行列にできる．

(対角化可能) (正則行列 P)

- 次に，$P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる P を選べる場合について考える

定義

$P^{\mathrm{T}}P = E_n$ となる正方行列 P を 直交行列 という． $\cdots$ $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる

定義

A : $n \times n$ 行列．

A : 直交対角化可能 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 直交行列 P で $P^{-1}AP$ を対角行列にできる．
(対角化可能) (正則行列 P)

注意

$P^{-1}AP = D$ (対角行列) とする．

- 次に，$P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる P を選べる場合について考える

定義

$P^{\mathrm{T}}P = E_n$ となる正方行列 P を 直交行列 という． $\cdots$ $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる

定義

$A : n \times n$ 行列.

A : 直交対角化可能 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 直交行列 P で $P^{-1}AP$ を対角行列にできる.

(対角化可能) (正則行列 P)

注意

$P^{-1}AP = D$ (対角行列) とする． A は直交対角化可能とすると，

- 次に，$P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる P を選べる場合について考える

定義

$P^{\mathrm{T}}P = E_n$ となる正方行列 P を <u>直交行列</u> という． $\cdots$ $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる

定義

A : $n \times n$ 行列．

A : <u>直交対角化可能</u> $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 直交行列 P で $P^{-1}AP$ を対角行列にできる．

<u>(対角化可能)</u> (正則行列 P)

注意

$P^{-1}AP = D$ (対角行列) とする． A は直交対角化可能とすると，

P : 直交行列 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$

- 次に，$P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる P を選べる場合について考える

定義

$P^{\mathrm{T}}P = E_n$ となる正方行列 P を <u>直交行列</u> という． $\cdots$ $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる

定義

A : $n \times n$ 行列．

A : <u>直交対角化可能</u> $\overset{\text{定義}}{\iff}$ 直交行列 P で $P^{-1}AP$ を対角行列にできる．

<u>(対角化可能)</u> (正則行列 P)

注意

$P^{-1}AP = D$ (対角行列) とする．A は直交対角化可能とすると，

P : 直交行列 $\overset{\text{定義}}{\iff}$ $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$

$\Rightarrow A = PDP^{\mathrm{T}}$

▶ 次に，$P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる P を選べる場合について考える

定義

$P^{\mathrm{T}}P = E_n$ となる正方行列 P を 直交行列 という． $\cdots$ $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる

定義

A : $n \times n$ 行列．

A : 直交対角化可能 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 直交行列 P で $P^{-1}AP$ を対角行列にできる．

(対角化可能)　(正則行列 P)

注意

$P^{-1}AP = D$ (対角行列) とする．A は直交対角化可能とすると，

P : 直交行列 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$

$\Rightarrow A = PDP^{\mathrm{T}}$

$\Rightarrow A^{\mathrm{T}} = PD^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} = PDP^{\mathrm{T}}$ $(\because D^{\mathrm{T}} = D)$

- 次に，$P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる P を選べる場合について考える

定義

$P^{\mathrm{T}}P = E_n$ となる正方行列 P を 直交行列 という． $\cdots$ $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる

定義

$A : n \times n$ 行列．

A : 直交対角化可能 $\overset{\text{定義}}{\iff}$ 直交行列 P で $P^{-1}AP$ を対角行列にできる．

(対角化可能) (正則行列 P)

注意

$P^{-1}AP = D$ (対角行列) とする． A は直交対角化可能とすると，

P : 直交行列 $\overset{\text{定義}}{\iff}$ $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$

$\Rightarrow A = PDP^{\mathrm{T}}$

$\Rightarrow A^{\mathrm{T}} = PD^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} = PDP^{\mathrm{T}}$ $(\because D^{\mathrm{T}} = D)$

$\Rightarrow A^{\mathrm{T}} = A$

▶ 次に，$P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる P を選べる場合について考える

定義

$P^{\mathrm{T}}P = E_n$ となる正方行列 P を 直交行列 という． $\cdots$ $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる

定義

A : $n \times n$ 行列．

A : 直交対角化可能 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 直交行列 P で $P^{-1}AP$ を対角行列にできる．

(対角化可能)　(正則行列 P)

注意

$P^{-1}AP = D$ (対角行列) とする． A は直交対角化可能とすると，

P : 直交行列 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$

$\Rightarrow A = PDP^{\mathrm{T}}$

$\Rightarrow A^{\mathrm{T}} = PD^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} = PDP^{\mathrm{T}}$ $(\because D^{\mathrm{T}} = D)$

$\Rightarrow A^{\mathrm{T}} = A \Rightarrow A$ は対称行列．

▶ 次に，$P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる P を選べる場合について考える

定義

$P^{\mathrm{T}}P = E_n$ となる正方行列 P を 直交行列 という． $\cdots$ $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる

定義

A : $n \times n$ 行列．

A : 直交対角化可能 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 直交行列 P で $P^{-1}AP$ を対角行列にできる．

(対角化可能) (正則行列 P)

注意

$P^{-1}AP = D$ (対角行列) とする． A は直交対角化可能とすると，

P : 直交行列 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$

$\Rightarrow A = PDP^{\mathrm{T}}$

$\Rightarrow A^{\mathrm{T}} = PD^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} = PDP^{\mathrm{T}}$ $(\because D^{\mathrm{T}} = D)$

$\Rightarrow A^{\mathrm{T}} = A \Rightarrow A$ は対称行列． $\cdots$ 実は，逆も成り立つ

定理 5.3

A : 正方行列.

A : 直交対角化可能 $\Leftrightarrow$ A : 対称行列.

定理 5.3

A：正方行列.
A：直交対角化可能 $\Leftrightarrow$ A：対称行列.

定義

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbb{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ の内積 $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \ (= \mathbb{x}^{\mathrm{T}} \mathbb{y})$ が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{E}^n$ と書き，n 次元ユークリッド空間という.

定理 5.3

A：正方行列．
A：直交対角化可能 $\Leftrightarrow$ A：対称行列．

定義

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbb{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ の内積 $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ $(= \mathbb{x}^{\mathrm{T}} \mathbb{y})$ が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{E}^n$ と書き，n 次元ユークリッド空間という．
このときの座標を，正規直交座標という．

定理 5.3

A : 正方行列.
A : 直交対角化可能 $\Leftrightarrow$ A : 対称行列.

定義

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbb{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ の 内積 $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ $(= \mathbb{x}^{\mathrm{T}} \mathbb{y})$ が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{E}^n$ と書き，n 次元ユークリッド空間 という.
このときの座標を，正規直交座標 という.

- この座標は原点 $\mathbb{o}$ を通り，n 個のベクトル

$$\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbb{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^n \text{ を座標軸に含む.}$$

定理 5.3

A : 正方行列.
A : 直交対角化可能 $\Leftrightarrow$ A : 対称行列.

定義

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbb{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ の 内積 $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ $(= \mathbb{x}^T \mathbb{y})$ が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{E}^n$ と書き，n 次元ユークリッド空間 という.
このときの座標を，正規直交座標 という.

- この座標は原点 $\mathbb{o}$ を通り，n 個のベクトル

$$\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbb{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^n \text{ を座標軸に含む.}$$

$\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n$ を $\mathbb{E}^n$ の 標準基底 という.

例

$A, B : n \times n$ 行列．$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ に対して，$\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \mathbb{x}^{\mathrm{T}}\, \mathbb{y}$ に注意する．

例

A, B : $n \times n$ 行列．$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ に対して，$\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \mathbb{x}^{\mathrm{T}}\,\mathbb{y}$ に注意する．
A の i 行の転置を $\mathbb{A}_i$, B の j 列を $\mathbb{b}_j$ とすれば,

例

A, B : $n \times n$ 行列．$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ に対して，$\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \mathbb{x}^{\mathrm{T}}\,\mathbb{y}$ に注意する．
A の i 行の転置を $\mathbb{A}_i$, B の j 列を $\mathbb{b}_j$ とすれば，

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbb{A}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{b}_1 & \cdots & \mathbb{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbb{A}_1, \mathbb{b}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbb{A}_1, \mathbb{b}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbb{A}_n, \mathbb{b}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbb{A}_n, \mathbb{b}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

例

A, B : $n \times n$ 行列．$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ に対して，$\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \mathbb{x}^{\mathrm{T}}\,\mathbb{y}$ に注意する．
A の i 行の転置を $\mathbb{A}_i$, B の j 列を $\mathbb{b}_j$ とすれば，

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbb{A}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{b}_1 & \cdots & \mathbb{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbb{A}_1, \mathbb{b}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbb{A}_1, \mathbb{b}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbb{A}_n, \mathbb{b}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbb{A}_n, \mathbb{b}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

特に，$P^{\mathrm{T}}P = E_n$ のときを考えれば，

$$P = \begin{pmatrix} \mathbb{p}_1 & \cdots & \mathbb{p}_n \end{pmatrix}$$ が直交行列 $\Leftrightarrow \langle \mathbb{p}_i, \mathbb{p}_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$

この δ_{ij} を クロネッカーのデルタ という．

定理 5.4 (内積の性質)

$\mathbb{x}, \mathbb{y}, \mathbb{z} \in \mathbb{E}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

(1) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle \geq 0$. $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbb{x} = \mathbb{o}$.

(2) $\langle \mathbb{x} + \mathbb{y}, \mathbb{z} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{z} \rangle + \langle \mathbb{y}, \mathbb{z} \rangle$, $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} + \mathbb{z} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle + \langle \mathbb{x}, \mathbb{z} \rangle$.

(3) $\langle c\,\mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = c \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$, $\langle \mathbb{x}, c\,\mathbb{y} \rangle = c \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$.

(4) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \langle \mathbb{y}, \mathbb{x} \rangle$.

5.2 正規直交化法と直交対角化法

定理 5.4 (内積の性質)

$\mathbb{x}, \mathbb{y}, \mathbb{z} \in \mathbb{E}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

(1) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle \geq 0$. $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbb{x} = \mathbb{o}$.

(2) $\langle \mathbb{x} + \mathbb{y}, \mathbb{z} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{z} \rangle + \langle \mathbb{y}, \mathbb{z} \rangle$, $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} + \mathbb{z} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle + \langle \mathbb{x}, \mathbb{z} \rangle$.

(3) $\langle c\,\mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = c\,\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$, $\langle \mathbb{x}, c\,\mathbb{y} \rangle = c\,\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$.

(4) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \langle \mathbb{y}, \mathbb{x} \rangle$.

定義

$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$.

$\mathbb{x}$ の <u>大きさ</u> $||\mathbb{x}|| := \sqrt{\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle}$.

定理 5.4 (内積の性質)

$\mathbb{x}, \mathbb{y}, \mathbb{z} \in \mathbb{E}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

(1) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle \geq 0$. $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbb{x} = \mathbb{o}$.

(2) $\langle \mathbb{x} + \mathbb{y}, \mathbb{z} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{z} \rangle + \langle \mathbb{y}, \mathbb{z} \rangle$, $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} + \mathbb{z} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle + \langle \mathbb{x}, \mathbb{z} \rangle$.

(3) $\langle c\,\mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = c\,\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$, $\langle \mathbb{x}, c\,\mathbb{y} \rangle = c\,\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$.

(4) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \langle \mathbb{y}, \mathbb{x} \rangle$.

定義

$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$.

$\mathbb{x}$ の <u>大きさ</u> $||\mathbb{x}|| := \sqrt{\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle}$. (内積の定義から，$||\mathbb{x}|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$)

定理 5.4 (内積の性質)

$\mathbb{x}, \mathbb{y}, \mathbb{z} \in \mathbb{E}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

(1) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle \geq 0$. $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbb{x} = \mathbb{o}$.

(2) $\langle \mathbb{x} + \mathbb{y}, \mathbb{z} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{z} \rangle + \langle \mathbb{y}, \mathbb{z} \rangle$, $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} + \mathbb{z} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle + \langle \mathbb{x}, \mathbb{z} \rangle$.

(3) $\langle c\,\mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = c \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$, $\langle \mathbb{x}, c\,\mathbb{y} \rangle = c \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$.

(4) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \langle \mathbb{y}, \mathbb{x} \rangle$.

定義

$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$.

$\mathbb{x}$ の <u>大きさ</u> $||\mathbb{x}|| := \sqrt{\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle}$. (内積の定義から, $||\mathbb{x}|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$)

例

$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^2$ の大きさは,

定理 5.4 (内積の性質)

$\mathbb{x}, \mathbb{y}, \mathbb{z} \in \mathbb{E}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

(1) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle \geq 0$. $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbb{x} = \mathbb{o}$.

(2) $\langle \mathbb{x} + \mathbb{y}, \mathbb{z} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{z} \rangle + \langle \mathbb{y}, \mathbb{z} \rangle$, $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} + \mathbb{z} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle + \langle \mathbb{x}, \mathbb{z} \rangle$.

(3) $\langle c\,\mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = c\,\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$, $\langle \mathbb{x}, c\,\mathbb{y} \rangle = c\,\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$.

(4) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \langle \mathbb{y}, \mathbb{x} \rangle$.

定義

$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$.

$\mathbb{x}$ の <u>大きさ</u> $||\mathbb{x}|| := \sqrt{\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle}$. (内積の定義から， $||\mathbb{x}|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$)

例

$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^2$ の大きさは， $||\mathbb{x}|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

5.2 正規直交化法と直交対角化法

定理 5.4 (内積の性質)

$\mathbb{x}, \mathbb{y}, \mathbb{z} \in \mathbb{E}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

(1) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle \geq 0$. $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbb{x} = \mathbb{o}$.

(2) $\langle \mathbb{x} + \mathbb{y}, \mathbb{z} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{z} \rangle + \langle \mathbb{y}, \mathbb{z} \rangle$, $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} + \mathbb{z} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle + \langle \mathbb{x}, \mathbb{z} \rangle$.

(3) $\langle c\,\mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = c\,\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$, $\langle \mathbb{x}, c\,\mathbb{y} \rangle = c\,\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$.

(4) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \langle \mathbb{y}, \mathbb{x} \rangle$.

定義

$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$.

$\mathbb{x}$ の <u>大きさ</u> $||\mathbb{x}|| := \sqrt{\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle}$. (内積の定義から，$||\mathbb{x}|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$)

例

$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^2$ の大きさは，$||\mathbb{x}|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.