数学基礎B2（第4回・2023/6/30）小テスト

在籍番号		氏名	

[1] **(定義)** A を $n \times n$ 行列とする．

$$A\,\mathbb{p} = \lambda\,\mathbb{p}$$

なる $\mathbb{p} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$) が存在するとき，$\lambda \in \mathbb{R}$ を A の $\boxed{}$ (1) といい，

$\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ を λ に対する A の $\boxed{}$ (2) という．これより，以下が成り立つ：

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の**固有値** $\Longleftrightarrow$ λ は t に関する n 次方程式 $f_A(t) = |t\,E - A| = 0$ の解.

$f_A(t) = |t\,E - A|$ を A の $\boxed{}$ (3), $f_A(t) = 0$ を A の $\boxed{}$ (4) と

いう．例えば，行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$f_A(t) = \boxed{}$ (5) となる.

[2] 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有多項式は $\boxed{}$ である．(← 因数分解した形で答える．)

(2) A の固有値は，$\lambda_1 = 4$ と $\lambda_2 = \boxed{}$ (2 重解) の 2 つである．

(3) A の λ_1 に対する固有ベクトルとして，$\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \boxed{} \end{pmatrix}$ がとれ，

λ_2 に対する固有ベクトルとして，$\mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる．

但し，3×3 行列 $P = (\mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2\ \mathbb{p}_3)$ が正則行列になるようにとる．

(4) 行列 P を用いれば，行列 A を $\boxed{}$ することができる．

すなわち，(5) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる．