数学基礎B2（第7回・2023/7/21）小テスト

在籍番号		氏名	

[1] **(定義)** $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の $\boxed{}$ であるとは，すべての $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{a} = b_1\mathbb{v}_1 + \cdots + b_n\mathbb{v}_n$ $(b_i \in \mathbb{R})$ と一意的に表せること．このとき，$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ を $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ に関する $\mathbb{a}$ の**座標**という．

[2] **(定義)** 写像 $\mathbb{y} = \mathbb{f}(\mathbb{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbb{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$ の各 $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ が $x_1, \ldots, x_n$ の同次1次式のとき，$\mathbb{y} = \mathbb{f}(\mathbb{x})$ を $\boxed{}$ という．

特に，$m = n$ のとき，**線形変換**という．

[3] 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする．A の固有多項式は $\boxed{}$ (1) である．

A の固有値は，$\lambda_1 = \boxed{}$ (2) と $\lambda_2 = \boxed{}$ (3) (2重解) の2つである．

A の λ_1 に対する固有ベクトルとして，$\mathbb{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \boxed{} \end{pmatrix}$ (4) がとれ，

λ_2 に対する固有ベクトルとして，$\mathbb{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれる．

但し，3×3 行列 $P = (\mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2\ \mathbb{p}_3)$ が正則行列になるようにとる．

行列 P の逆行列は $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & \boxed{} \end{pmatrix}$ (5)，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{} \end{pmatrix}$ (6) となる．

さらに，A を**直交対角化**するには，グラム・シュミットの正規直交化法を用いて，行列 $P = (\mathbb{p}_1\ \mathbb{p}_2\ \mathbb{p}_3)$ から直交行列 $Q = (\mathbb{q}_1\ \mathbb{q}_2\ \mathbb{q}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \boxed{} \end{pmatrix}$ (7) を作ればよい．

応用として，$A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2 \cdot 2^n & 5^n - 2 \cdot 2^n + 2^n & 5^n + 2^n - 2 \cdot 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2 \cdot 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & \boxed{} \end{pmatrix}$ (8) がえられる．