はじめに　(線形代数 IIA)

$\boxed{\text{線形代数 II} \quad = \quad \text{線形代数 I のつづき}}$

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 ⟶ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

4.3　部分空間

V : 線形空間.

定義 (部分空間)

$W \subset V$ が V 上の和とスカラー倍を W に制限して線形空間をなすとき, W を V の <u>部分空間</u> という.

例

$\{0\} \subset V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\} \subset \mathbb{R}^3$: 部分空間.
$\{0\} \subset V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = at, y = bt, z = ct\, (t \in \mathbb{R})\} \subset \mathbb{R}^3$: 部分空間.

注意

V : 線形空間.
$W \subset V \Rightarrow W$ は公理 $2, 3, 7, 8, 9, 10$ をみたす.
よって, 公理 $1, 4, 5, 6$ のみチェックすればよい. さらに $\cdots$

定理 4

V：線形空間，$W \subset V$：部分集合.
$W \subset V$：部分空間 $\iff$
(a) $\mathbb{u}, \mathbb{v} \in W \Rightarrow \mathbb{u} + \mathbb{v} \in W$ (公理 1)
(W は <u>和について閉じている</u> という)
(b) $\mathbb{u} \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow k\mathbb{u} \in W$ (公理 6).
(W は <u>スカラー倍について閉じている</u> という)

$\because$ ($\Rightarrow$) 公理 1〜10 をみたすので OK.
($\Leftarrow$) 上の注意より，公理 4, 5 を示せばよい.
$\mathbb{u} \in W$. (b) より，$0 \in \mathbb{R}$ で $0 \cdot \mathbb{u} \underset{\text{定理 3}}{=} \mathbb{o} \in W$ より公理 4 は OK.
$-1 \in \mathbb{R}$ で $(-1) \cdot \mathbb{u} \underset{\text{定理 3}}{=} -\mathbb{u} \in W$ より公理 5 も OK. □

注意

V：線形空間
$\Rightarrow V, \{\mathbb{o}\}$ の 2 つは (いつも) 部分空間であり，<u>自明な部分空間</u> という.

例

$M_{2,2} = M_{2,2}(\mathbb{R})$: 実数成分の 2×2 行列全体.

$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2,2}$: 部分空間.

$\because A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W, k \in \mathbb{R}.$

$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W,\ kA = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ kb_1 & 0 \end{pmatrix} \in W.$

よって，定理 4 より OK.

例

$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$: $\mathbb{R}$ 上の実数値関数全体

$W = \mathbb{R}[X]_n$: n 次以下の多項式全体

$\Rightarrow W \subset V$: 部分空間.

$\because f, g \in W, k \in \mathbb{R}.$

$(f + g)(x) := f(x) + g(x), (kf)(x) := kf(x)$ により，$f + g, kf \in W.$

よって，定理 4 より OK.

例

$V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$: $\mathbb{R}$ 上の実数値関数全体
$W=C(-\infty,\infty)$: $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数全体.
$\Rightarrow W\subset V$: 部分空間.
$\because f,g\in W, k\in\mathbb{R}\Rightarrow f+g, kf\in W$ と定理 4 より OK.

例

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\in M_{m,n},\ \mathbb{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \mathbb{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ に対して，$A\mathbb{x}=\mathbb{b}$ は連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

を表す．$\mathbb{b}=\mathbb{o}$ のとき，$W=\{\mathbb{x}\in\mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x}=\mathbb{o}\}\subset\mathbb{R}^n$: 部分空間.

例

$W = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \mathbb{o}\} \subset \mathbb{R}^n$: 部分空間.

$\because \mathbb{x}, \mathbb{x}' \in W, k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow A\mathbb{x} = \mathbb{o}, A\mathbb{x}' = \mathbb{o}$

$\Rightarrow A(\mathbb{x} + \mathbb{x}') = A\mathbb{x} + A\mathbb{x}' = \mathbb{o} + \mathbb{o} = \mathbb{o}$. よって, $\mathbb{x} + \mathbb{x}' \in W$.

$A(k\mathbb{x}) = k(A\mathbb{x}) = k \cdot \mathbb{o} = \mathbb{o}$ より, $k\mathbb{x} \in W$. 定理 4 より OK. $\square$

注意

$W = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \mathbb{o}\}$ は $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ の 解空間 とよばれる.

(解全体が線形空間になっている!! $\mathbb{R}^n$ の部分空間)

定義 (1 次結合でかける)

ベクトル $\mathbb{w} \in V$ がベクトル $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r \in V$ を用いて,
$\mathbb{w} = k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_r\mathbb{v}_r$ とかけるとき,
$\mathbb{w}$ は $\underline{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r \text{ の 1 次結合でかける}}$ という.

例

$\mathbb{u} = (1, 2, -1), \mathbb{v} = (6, 4, 2) \in \mathbb{R}^3$.
$\mathbb{w} = (9, 2, 7)$ は $\mathbb{u}, \mathbb{v}$ の 1 次結合でかける.
$\mathbb{w}' = (4, -1, 8)$ は $\mathbb{u}, \mathbb{v}$ の 1 次結合でかけない.
$\because$ $\mathbb{w} = k_1\mathbb{u} + k_2\mathbb{v}$ とすると,
$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$
$= (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$.
これを解くと, $k_1 = -3$, $k_2 = 2$. すなわち, $\mathbb{w} = -3\mathbb{u} + 2\mathbb{v}$.
$\mathbb{w}' = k_1\mathbb{u} + k_2\mathbb{v}$ とすると,
$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$
$= (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$ の解はない. (各自) $\square$