はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 || = 線形代数 | のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」現代数学社

講義の情報 | http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス LINK

 ノートを取りながら講義を聴くこと. (ノートを回収して確認する可能性があります)
 講義 → 小テスト(理解度確認テスト,学務情報システム内)

V:線形空間.

V:線形空間.

定義 (部分空間)

$W \subset V$ がV上の和とスカラー倍をWに制限して線形空間をなすとき, $W \in V$ の 部分空間 という.

V:線形空間.

定義(部分空間)

$W \subset V$ がV上の和とスカラー倍をWに制限して線形空間をなすとき, $W \in V$ の 部分空間 という.

例

$\{0\} \subset V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\} \subset \mathbb{R}^3 :$ $\hat{a} \hat{D} \cong \mathbb{B}^1.$

V:線形空間.

定義(部分空間)

$W \subset V$ がV上の和とスカラー倍をWに制限して線形空間をなすとき, $W \in V$ の部分空間という.

$$\{ \mathbf{o} \} \subset V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \} \subset \mathbb{R}^3 : 部分空間.$$

$$\{ \mathbf{o} \} \subset V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = at, y = bt, z = ct \ (t \in \mathbb{R}) \} \subset \mathbb{R}^3 :$$
 部分空間.

V:線形空間.

定義(部分空間)

$W \subset V$ がV上の和とスカラー倍をWに制限して線形空間をなすとき, $W \in V$ の 部分空間 という.

例

$$\{0\} \subset V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\} \subset \mathbb{R}^3 : 部分空間.$$

$$\{0\} \subset V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = at, y = bt, z = ct \ (t \in \mathbb{R})\} \subset \mathbb{R}^3 :$$

部分空間.

注意

V:線形空間.

 $W \subset V \Rightarrow W$ は公理 2,3,7,8,9,10 をみたす.

V:線形空間.

定義(部分空間)

$W \subset V$ がV上の和とスカラー倍をWに制限して線形空間をなすとき, $W \in V$ の 部分空間 という.

例

$$\{0\} \subset V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\} \subset \mathbb{R}^3 : 部分空間.$$

$$\{0\} \subset V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = at, y = bt, z = ct \ (t \in \mathbb{R})\} \subset \mathbb{R}^3 :$$

部分空間.

注意

V:線形空間.

 $W \subset V \Rightarrow W$ は公理 2,3,7,8,9,10 をみたす.

よって, 公理1,4,5,6のみチェックすればよい. さらに…

 $V: 線形空間, W \subset V: 部分集合.$ $W \subset V: 部分空間 \iff$

 $V:線形空間, W \subset V: 部分集合.$ $W \subset V: 部分空間 \iff$ $(a) u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$ (公理 1) (W tk<u>和について閉じている</u> という)

```
V:線形空間, W \subset V:部分集合.

W \subset V:部分空間 \iff

(a) u, v \in W \Rightarrow u + v \in W (公理 1)

(W l a \underline{Alcovt Rl U C V S} b v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c v b c
```

 $V:線形空間, W \subset V:部分集合.$ $W \subset V:部分空間 \iff$ $(a) u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$ (公理 1) $(W l a \underline{Alcovtrl()} C r v a b b c v a b$

:: (⇒) 公理 1~10 をみたすので OK.

 $V:線形空間, W \subset V:部分集合.$ $W \subset V:部分空間 \iff$ $(a) u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$ (公理 1) $(W l a \underline{AlcovtRUCRS} cv5)$ $(b) u \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow ku \in W$ (公理 6). (W l a above control (Cv5))

∵ (⇒) 公理 1~10 をみたすので OK. (⇐) 上の注意より, 公理 4,5 を示せばよい.

 $V:線形空間, W \subset V:部分集合.$ $W \subset V: 部分空間 \iff$ $(a) u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$ (公理 1) $(W l a \underline{Alcovtrrow} cW)$ $(b) u \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow ku \in W$ (公理 6). (W l a above characteristic observation of the state observation of the st

∵ (⇒) 公理 1~10 をみたすので OK. (⇐) 上の注意より,公理 4,5 を示せばよい. $u \in W$. (b) より, $0 \in \mathbb{R}$ で 0 · $u = 0 \in W$ より公理 4 は OK.

 $V:線形空間, W \subset V:部分集合.$ $W \subset V:部分空間 \iff$ $(a) u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$ (公理 1) $(W l a \underline{AlcovtRUCRS} cv5)$ $(b) u \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow ku \in W$ (公理 6). (W l a above control (Cv5))

:: (⇒) 公理 1~10 をみたすので OK.
(⇐) 上の注意より,公理 4,5 を示せばよい.
$$u \in W$$
. (b) より, $0 \in \mathbb{R}$ で $0 \cdot u = 0 \in W$ より公理 4 は OK.
 $-1 \in \mathbb{R}$ で $(-1) \cdot u = -u \in W$ より公理 5 も OK.

 $V:線形空間, W \subset V:部分集合.$ $W \subset V: 部分空間 \iff$ $(a) u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$ (公理 1) $(W l a \underline{Alcovtrrow} cW)$ $(b) u \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow ku \in W$ (公理 6). (W l a above characteristic observation of the state observation of the st

∵ (⇒) 公理 1~10 をみたすので OK.
(⇐) 上の注意より,公理 4,5 を示せばよい.
$$u \in W.$$
 (b) より, $0 \in \mathbb{R} \subset 0 \cdot u = 0 \in W$ より公理 4 は OK.
 $-1 \in \mathbb{R} \subset (-1) \cdot u = -u \in W$ より公理 5 も OK.

注意

V:線形空間

⇒ V, { $_{0}$ } の 2 つは (いつも) 部分空間であり, 自明な部分空間 という.



$$M_{2,2} = M_{2,2}(\mathbb{R}) : 実数成分の 2 \times 2 行列全体.$$
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2,2} : 部分空間.$$



$$M_{2,2} = M_{2,2}(\mathbb{R}) : 実数成分の 2 \times 2 行列全体.$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2,2} : 部分空間.$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W, k \in \mathbb{R}.$$



$$M_{2,2} = M_{2,2}(\mathbb{R}) : 実数成分の 2 \times 2 行列全体.$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2,2} : 部分空間.$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W, k \in \mathbb{R}.$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W, kA = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ kb_1 & 0 \end{pmatrix} \in W.$$



$$\begin{split} M_{2,2} &= M_{2,2}(\mathbb{R}) : 実数成分の \, 2 \times 2 \, \widehat{7} \overline{9} \, \widehat{2} \, \mathbb{k}. \\ W &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2,2} : 部分空間. \\ \because A &= \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W, k \in \mathbb{R}. \\ A + B &= \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W, \, kA = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ kb_1 & 0 \end{pmatrix} \in W. \\ \texttt{kocc}, \ \overline{c} \overline{x} \overline{x} 4 \, \texttt{k} \, \texttt{b} \, \mathsf{OK}. \end{split}$$



$$M_{2,2} = M_{2,2}(\mathbb{R}) : 実数成分の 2 \times 2 行列全体.$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2,2} : 部分空間.$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W, k \in \mathbb{R}.$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W, kA = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ kb_1 & 0 \end{pmatrix} \in W.$$
よって、定理 4 より OK.

 $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} : \mathbb{R} \perp$ の実数値関数全体 $W = \mathbb{R}[X]_n : n$ 次以下の多項式全体



$$M_{2,2} = M_{2,2}(\mathbb{R}) : 実数成分の 2 \times 2 行列全体.$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2,2} : 部分空間.$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W, k \in \mathbb{R}.$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W, kA = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ kb_1 & 0 \end{pmatrix} \in W.$$

$$k \Rightarrow \mathsf{C}, \ \mathsf{E} = 4 \ \mathsf{L} \ \mathsf{D} \ \mathsf{OK}.$$

 $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} : \mathbb{R}$ 上の実数値関数全体 $W = \mathbb{R}[X]_n : n$ 次以下の多項式全体 $\Rightarrow W \subset V : 部分空間.$



$$M_{2,2} = M_{2,2}(\mathbb{R}) : 実数成分の 2 \times 2 行列全体.$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2,2} : 部分空間.$$

$$\because A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W, k \in \mathbb{R}.$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W, kA = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ kb_1 & 0 \end{pmatrix} \in W.$$

$$k \Rightarrow \mathsf{C}, \ \mathsf{E} = 4 \ \mathsf{L} \ \mathsf{D} \ \mathsf{OK}.$$

 $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} : \mathbb{R} \bot \mathcal{O}$ 実数値関数全体 $W = \mathbb{R}[X]_n : n 次以下の多項式全体$ $\Rightarrow W \subset V : 部分空間.$ $\because f, g \in W, k \in \mathbb{R}.$ $(f + g)(x) := f(x) + g(x), (kf)(x) := kf(x) により, f + g, kf \in W.$ よって,定理4よりOK.



 $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} : \mathbb{R}$ 上の実数値関数全体 $W = C(-\infty, \infty) : \mathbb{R}$ 上の実数値連続関数全体.



 $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} : \mathbb{R}$ 上の実数値関数全体 $W = C(-\infty, \infty) : \mathbb{R}$ 上の実数値連続関数全体. $\Rightarrow W \subset V : 部分空間.$



 $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} : \mathbb{R} \bot$ の実数値関数全体 $W = C(-\infty, \infty) : \mathbb{R} \bot$ の実数値連続関数全体. $\Rightarrow W \subset V : 部分空間.$ $\because f, g \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g, kf \in W$ と定理4よりOK.



 $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} : \mathbb{R} \bot$ の実数値関数全体 $W = C(-\infty, \infty) : \mathbb{R} \bot$ の実数値連続関数全体. $\Rightarrow W \subset V : 部分空間.$ $\because f, g \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g, kf \in W$ と定理4よりOK.

例

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$
に対し
て, Ax = b は連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

を表す.



 $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} : \mathbb{R} \bot$ の実数値関数全体 $W = C(-\infty, \infty) : \mathbb{R} \bot$ の実数値連続関数全体. $\Rightarrow W \subset V : 部分空間.$ $\because f, g \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g, kf \in W$ と定理4よりOK.

例

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$
に対し
て, Ax = b は連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

を表す. b = 0のとき, $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \subset \mathbb{R}^n$: 部分空間.

$W = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \subset \mathbb{R}^n :$ $\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{l}}$.

```
W = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \subset \mathbb{R}^n :  部分空間.
\therefore \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in W, k \in \mathbb{R}
```

 $W = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \subset \mathbb{R}^n : 部分空間.$:: $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in W, k \in \mathbb{R}$ ⇒ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}, A\mathbf{x}' = \mathbf{0}$

$$W = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \subset \mathbb{R}^n : \text{information}$$

$$\because \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in W, k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}, A\mathbf{x}' = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = A\mathbf{x} + A\mathbf{x}' = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

$$\begin{split} W &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \subset \mathbb{R}^n : 部分空間.\\ \therefore \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in W, k \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}, A\mathbf{x}' = \mathbf{0} \\ \Rightarrow A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = A\mathbf{x} + A\mathbf{x}' = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad \texttt{よって, } \mathbf{x} + \mathbf{x}' \in W. \end{split}$$

$$\begin{split} W &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \subset \mathbb{R}^n : 部分空間. \\ \therefore \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in W, k \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}, A\mathbf{x}' = \mathbf{0} \\ \Rightarrow A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') &= A\mathbf{x} + A\mathbf{x}' = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad \mathbf{\texttt{L}} \ \mathbf{0} \ \mathbf{C}, \ \mathbf{x} + \mathbf{x}' \in W. \\ A(k\mathbf{x}) &= k(A\mathbf{x}) = k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \mathbf{\texttt{L}} \ \mathbf{0}, \ k\mathbf{x} \in W. \end{split}$$

$$\begin{split} W &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \subset \mathbb{R}^n : 部分空間. \\ \therefore \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in W, k \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}, A\mathbf{x}' = \mathbf{0} \\ \Rightarrow A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') &= A\mathbf{x} + A\mathbf{x}' = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad \mathbf{\texttt{L}} \supset \mathsf{T}, \quad \mathbf{x} + \mathbf{x}' \in W. \\ A(k\mathbf{x}) &= k(A\mathbf{x}) = k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \mathbf{\texttt{L}} \mathcal{D}, \quad k\mathbf{x} \in W. \quad 定理 4 \quad \mathbf{\texttt{L}} \mathcal{D} \text{ OK}. \end{split}$$

$$W = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \subset \mathbb{R}^n : 部分空間.$$

$$\therefore \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in W, k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}, A\mathbf{x}' = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = A\mathbf{x} + A\mathbf{x}' = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad \mathbf{\textit{k}} \circ \mathbf{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{x} + \mathbf{x}' \in W.$$

$$A(k\mathbf{x}) = k(A\mathbf{x}) = k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \mathbf{\textit{k}} \mathsf{)}, \quad k\mathbf{x} \in W. \quad \mathbf{\overline{c}} = 4 \quad \mathbf{\textit{k}} \mathsf{)} \mathsf{OK}.$$

注意

$$W = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$
は $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の 解空間 とよばれる.

$$W = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \subset \mathbb{R}^n : 部分空間.$$

$$\therefore \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in W, k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}, A\mathbf{x}' = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = A\mathbf{x} + A\mathbf{x}' = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{C}, \quad \mathbf{x} + \mathbf{x}' \in W.$$

$$A(k\mathbf{x}) = k(A\mathbf{x}) = k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \mathbf{b}, \quad k\mathbf{x} \in W. \quad \mathbf{c} = \mathbf{4} \quad \mathbf{b} \quad \mathsf{OK}.$$

注意

$$W = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \ \mathsf{t} \ A\mathbf{x} = \mathbf{0} \ \mathsf{o} \ \mathbf{\underline{M}} \underline{\mathbf{c}} \mathbf{\overline{l}} \ \mathsf{b} \mathbf{\overline{l}} \mathbf{\overline{l}}$$

ベクトル $w \in V$ がベクトル $v_1, \ldots, v_r \in V$ を用いて, $w = k_1 v_1 + \cdots + k_r v_r$ とかけるとき,

ベクトル w $\in V$ がベクトル $v_1, \ldots, v_r \in V$ を用いて, w = $k_1v_1 + \cdots + k_rv_r$ とかけるとき, w は v_1, \ldots, v_r の1 次結合でかける という.

ベクトル w $\in V$ がベクトル v₁,..., v_r $\in V$ を用いて, w = k_1 v₁ + ··· + k_r v_r とかけるとき, w は v₁,..., v_r の 1 次結合でかける という.



 $\mathbf{u} = (1, 2, -1), \mathbf{v} = (6, 4, 2) \in \mathbb{R}^3.$

ベクトル w $\in V$ がベクトル v₁,..., v_r $\in V$ を用いて, w = k_1 v₁ + ··· + k_r v_r とかけるとき, w は v₁,..., v_r の 1 次結合でかける という.

例

 $u = (1, 2, -1), v = (6, 4, 2) \in \mathbb{R}^3.$ w = (9, 2, 7) は u, v の 1 次結合でかける.

ベクトル w $\in V$ がベクトル v₁,..., v_r $\in V$ を用いて, w = k_1 v₁ + ··· + k_r v_r とかけるとき, w は v₁,..., v_r の 1 次結合でかける という.

例

 $u = (1, 2, -1), v = (6, 4, 2) \in \mathbb{R}^3.$ w = (9, 2, 7)はu, v O 1次結合でかける. w' = (4, -1, 8)はu, v O 1次結合でかけない.

ベクトル w $\in V$ がベクトル v₁,..., v_r $\in V$ を用いて, w = k_1 v₁ + ··· + k_r v_r とかけるとき, w は v₁,..., v_r の 1 次結合でかける という.

例

$$\begin{split} \mathbf{u} &= (1, 2, -1), \mathbf{v} = (6, 4, 2) \in \mathbb{R}^3.\\ \mathbf{w} &= (9, 2, 7) \textit{ は } \mathbf{u}, \mathbf{v} \mathcal{O} \mathbf{1} 次結合でかける.\\ \mathbf{w}' &= (4, -1, 8) \textit{ t } \mathbf{u}, \mathbf{v} \mathcal{O} \mathbf{1} 次結合でかけない.\\ \because \mathbf{w} &= k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v} \textit{ と} \mathsf{ t} \mathsf{ a} \textit{ L}, \end{split}$$

ベクトル w $\in V$ がベクトル $v_1, \ldots, v_r \in V$ を用いて, w = $k_1v_1 + \cdots + k_rv_r$ とかけるとき, w は v_1, \ldots, v_r の1次結合でかける という.

$$u = (1, 2, -1), v = (6, 4, 2) \in \mathbb{R}^{3}.$$

$$w = (9, 2, 7) l t u, v O 1 次結合でかける.$$

$$w' = (4, -1, 8) l t u, v O 1 次結合でかけない.$$

$$\because w = k_{1}u + k_{2}v とすると,$$

$$(9, 2, 7) = k_{1}(1, 2, -1) + k_{2}(6, 4, 2)$$

$$= (k_{1} + 6k_{2}, 2k_{1} + 4k_{2}, -k_{1} + 2k_{2}).$$

ベクトル w $\in V$ がベクトル $v_1, \ldots, v_r \in V$ を用いて, w = $k_1v_1 + \cdots + k_rv_r$ とかけるとき, w は v_1, \ldots, v_r の1次結合でかける という.

$$\begin{split} \mathbf{u} &= (1,2,-1), \mathbf{v} = (6,4,2) \in \mathbb{R}^3.\\ \mathbf{w} &= (9,2,7) \ \mathbf{k} \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \ \mathcal{O} \ \mathbf{1} \ \chi \\ & \mathbf{k} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{w}' &= (4,-1,8) \ \mathbf{k} \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \ \mathcal{O} \ \mathbf{1} \ \chi \\ & \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \\ \mathbf{w}' &= k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v} \\ & \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \\ & \mathbf{k} \\ \mathbf{u} \\ & \mathbf{k} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \\ & \mathbf{k} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \\ & \mathbf{k} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{v$$

ベクトル w $\in V$ がベクトル $v_1, \ldots, v_r \in V$ を用いて, w = $k_1v_1 + \cdots + k_rv_r$ とかけるとき, w は v_1, \ldots, v_r の1次結合でかける という.

$$\begin{split} \mathbf{u} &= (1,2,-1), \mathbf{v} = (6,4,2) \in \mathbb{R}^3.\\ \mathbf{w} &= (9,2,7) \ \mathbf{k} \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \ \mathcal{O} \ \mathbf{1} \ \chi \\ \texttt{ide} \ \mathbf{C} \ \texttt{o} \ \texttt{b} \ \texttt{f} \ \texttt{d}.\\ \mathbf{w}' &= (4,-1,8) \ \mathbf{k} \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \ \mathcal{O} \ \mathbf{1} \ \chi \\ \texttt{ide} \ \texttt{c} \ \texttt{o} \ \texttt{b} \ \texttt{f} \ \texttt{d}.\\ \because &= k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v} \ \texttt{c} \ \texttt{f} \ \texttt{d} \ \texttt{c},\\ (9,2,7) &= k_1 (1,2,-1) + k_2 (6,4,2)\\ &= (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2).\\ \mathbf{c} \ \texttt{h} \ \texttt{c} \ \texttt{k} \ \texttt{k} \ \texttt{k} \ \texttt{l} \ = -3, \ k_2 = 2. \ \texttt{f} \ \texttt{c} \ \texttt{b} \ \texttt{b} \ \texttt{f}, \ \mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} \\ \mathbf{w}' &= k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v} \ \texttt{c} \ \texttt{f} \ \texttt{d} \ \texttt{c}, \end{split}$$

ベクトル w $\in V$ がベクトル $v_1, \ldots, v_r \in V$ を用いて, w = $k_1v_1 + \cdots + k_rv_r$ とかけるとき, w は v_1, \ldots, v_r の1次結合でかける という.