

はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

定義 (V を張る)

任意の $\mathbf{v} \in V$ が $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V$ の 1 次結合でかけるとき,
i.e. $\mathbf{v} = k_1 \mathbf{v}_1 + \dots + k_r \mathbf{v}_r$, (i.e. \dots すなわち)
 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ は V を張る といい, $V = \mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$,
 $V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$, $V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle_{\mathbb{R}}$ などとかく. 以降,
 $V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ とかく.

例

$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ は \mathbb{R}^3 を張る : $\mathbb{R}^3 = \text{Span}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.
 \therefore 任意の $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ とかける.

例

$\mathbb{R}[X]_n = \text{Span}\{1, X, \dots, X^n\}$.
 \therefore 任意の $f \in \mathbb{R}[X]_n$ は $f = a_0 \cdot 1 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ とかける.

例

$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$ は \mathbb{R}^3 を張るか？

つまり, $\mathbb{R}^3 = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$?

任意の $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbf{b} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$ とかけるか？

$\mathbf{b} = (k_1 + k_2 + 2k_3, k_1 + k_3, 2k_1 + k_2 + 3k_3)$. つまり,

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + 2k_3 = b_1 \\ k_1 + k_3 = b_2 \\ 2k_1 + k_2 + 3k_3 = b_3 \end{cases} \quad \text{が解をもつか?} \quad \text{これは, } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

として, $A \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とかける. A : 正則行列 \Rightarrow 解あり:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad \text{しかし, } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$0 + 2 + 2 - 0 - 1 - 3 = 0$ より, A の階数は 2 以下であり, 解 (k_1, k_2, k_3) がないような \mathbf{b} が存在する. よって, $\mathbb{R}^3 \neq \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

定義

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V$.

$\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} := \{k_1\mathbf{v}_1 + \dots + k_r\mathbf{v}_r \mid k_i \in \mathbb{R}\} \subset V$

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ によって張られる (線形) 空間 という.

定理 5

V : 線形空間, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V$.

(a) $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \subset V$: 部分空間.

(b) $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ は $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ を含む V の最小の部分空間.

(すなわち, $W' \subset V$: 部分空間, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in W' \Rightarrow W \subset W'$)

(証明) (a) 定理 4 から $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in W \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{u}' \in W, k\mathbf{u} \in W$ を示せばよい.

$\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in W \Rightarrow \mathbf{u} = \exists c_1\mathbf{v}_1 + \dots + \exists c_r\mathbf{v}_r, \mathbf{u}' = \exists c'_1\mathbf{v}_1 + \dots + \exists c'_r\mathbf{v}_r$

$\Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{u}' = (c_1 + c'_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (c_r + c'_r)\mathbf{v}_r \in W,$

$k\mathbf{u} = (kc_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (kc_r)\mathbf{v}_r \in W$ より OK.

(b) $W \ni \mathbf{v}_i$ に注意すると, $W' \subset V$: 部分空間かつ $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in W'$

$\Rightarrow c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_r\mathbf{v}_r \in W' \Rightarrow W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \subset W'.$ □

▶ 教 p.171 例 20, pp.172–173 練習問題 4.3 を各自みておく.

4.4 1次独立性

V : 線形空間.

定義 (1次独立, 1次従属)

$v_1, \dots, v_r \in V$ が 1次独立 であるとは, $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{R}$ に対して,
 $k_1 v_1 + \dots + k_r v_r = \mathbf{0} \Rightarrow k_1 = \dots = k_r = 0$
をみたすこと. そうでないとき, 1次従属 という.

注意

$P \Rightarrow Q$ の否定は P かつ Q でない.

$\neg(P \Rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$ ($\neg \dots$ 否定)

注意

1次従属である とは,

$k_1 v_1 + \dots + k_r v_r = \mathbf{0}$ かつ $(k_1, \dots, k_r) \neq (0, \dots, 0)$

なる $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{R}$ が存在すること.

すなわち, v_1, \dots, v_r が “1次の関係式” をもつこと.

例

$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0, 3), \mathbf{v}_2 = (1, 2, 5, -1), \mathbf{v}_3 = (7, -1, 5, 8) \in \mathbb{R}^4$ は 1 次従属.
 $\therefore 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = (0, 0, 0, 0) = \mathbf{0}.$

例

$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2 \in \mathbb{R}[x]$ は 1 次従属.
 $\therefore 3\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + 2\mathbf{p}_3 = 0.$

例

$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ は 1 次独立.
 $\therefore k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = \mathbf{0} \Rightarrow (k_1, k_2, k_3) = \mathbf{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0.$

例

$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ は

1 次独立か？ 1 次従属か？

$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ とする． つまり，

$(k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$ であり，
連立 1 次方程式

$$\begin{cases} k_1 + 5k_2 + 3k_3 = 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 = 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

を解くと， $(k_1, k_2, k_3) = (-\frac{1}{2}t, -\frac{1}{2}t, t) \ (t \in \mathbb{R})$.

よって， $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は 1 次従属.

注意

$v_1, \dots, v_r \in V$ が “1 次従属”

$$\iff \exists (k_1, \dots, k_r) \neq (0, \dots, 0) \text{ s.t. } k_1 v_1 + \dots + k_r v_r = \mathbf{0}.$$

よって, $k_1 \neq 0$ とすると, これは

$$v_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)v_2 + \dots + \left(-\frac{k_r}{k_1}\right)v_r$$

と v_1 が v_2, \dots, v_r の 1 次結合でかけることをあらわしている.

定理 6

$v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$. $r > n \Rightarrow v_1, \dots, v_r$ は 1 次従属.

(証明) $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$ ($i = 1, \dots, r$) として, $k_1 v_1 + \dots + k_r v_r = \mathbf{0}$ を考えると, 方程式

$$\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{r1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

をえるが, 未知数の数 $= r > n =$ 方程式の数より,
(k_1, \dots, k_r) $\neq (0, \dots, 0)$ なる解をもつ. (教 p.31 定理 1)

